

# Capitolo 1

## Richiami di analisi vettoriale

### 1.1 Concetti introduttivi

Nell'operare con le equazioni dell'elettromagnetismo, è importante conoscere e saper utilizzare alcuni risultati fondamentali dell'analisi vettoriale. In questa appendice vengono riassunti i risultati fondamentali relativi agli operatori più comunemente usati per le equazioni del campo elettromagnetico.

### 1.2 Operatori differenziali

#### 1.2.1 Operatori del primo ordine

Tra gli operatori differenziali del primo ordine meritano particolare attenzione i seguenti

- gradiente
- divergenza
- rotazionale (o rotore)

##### 1.2.1.1 Gradiente

Il gradiente è un operatore differenziale che applicato ad un campo scalare ne produce, punto per punto, uno vettoriale. Chiamando con

$\varphi$  una funzione scalare della posizione, detta potenziale, si definisce gradiente di  $\varphi$  il vettore

$$\vec{u} = \vec{\nabla}\varphi, \quad (1.1)$$

che può scriversi nelle sue componenti, rispetto ad una terna di assi cartesiani ortogonali,

$$u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}. \quad (1.2)$$

Dal momento che su ogni superficie di livello di  $\varphi$ , ossia le superfici in cui  $\varphi$  assume un valore costante, il gradiente risulta nullo per definizione, per una direzione qualsiasi  $\vec{n}$  si avrà

$$\begin{aligned} u_n\vec{n} &= \frac{\partial\varphi}{\partial n}\vec{n} = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\frac{dn}{dx}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dn}{dx}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dn}{dx}\vec{k} = \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial n}\cos\alpha\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\beta\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos\gamma\vec{k} \end{aligned}$$

in cui si sono introdotti i coseni direttori della direzione  $\vec{n}$  rispetto ad una terna di assi cartesiani. Da quanto sopra risulta l'espressione

$$\vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{n} = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\vec{n}$$

per il prodotto scalare, da cui si evince che il gradiente è massimo nella direzione  $\vec{n}$  che risulta ortogonale in ogni punto alla tangente alla superficie di livello passante per quel punto<sup>1</sup>.

Può risultare utile esprimere il gradiente rispetto ad altri sistemi di coordinate:

**Gradiente in coordinate non cartesiane** In casi bidimensionali utilizzando le *coordinate polari*  $\rho, \phi$ :

$$\vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}\vec{e}_\phi \quad (1.3)$$

Nei casi tridimensionali in coordinate cilindriche  $\rho, \phi, z$ :

$$\vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}\vec{e}_\phi + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{e}_z \quad (1.4)$$

---

<sup>1</sup>Infatti dovendo il prodotto scalare  $\vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{n}$  essere nullo nella direzione della tangente ad ogni superficie di livello, si rammenti che il prodotto scalare si annulla per vettori ortogonali mentre è massimo per vettori paralleli.

ed in coordinate sferiche  $\rho, \vartheta, \phi$ :

$$\vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\vec{e}_\vartheta + \frac{1}{\rho\sin\vartheta}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}\vec{e}_\phi. \quad (1.5)$$

### 1.2.2 Divergenza

Operatore che si applica ad un vettore ottenendo come risultato uno scalare:

$$\varphi = \vec{\nabla} \cdot \vec{u}. \quad (1.6)$$

In coordinate cartesiane l'operatore divergenza si scrive

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad (1.7)$$

mentre in coordinate polari

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\phi}{\partial\phi}.$$

In coordinate cilindriche

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

ed, infine, in coordinate sferiche

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial(\sin\vartheta u_\vartheta)}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial u_\phi}{\partial\phi}.$$

### 1.2.3 Rotazionale o rotore

E' un operatore differenziale del primo ordine che, applicato ad un vettore restituisce un vettore:

$$\vec{u} = \vec{\nabla} \times \vec{v}. \quad (1.8)$$

In coordinate cartesiane

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ u_y &= \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ u_z &= \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}. \end{aligned}$$

In coordinate polari vi è solo la componente ortogonale al piano

$$u_z = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rv_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right)$$

in coordinate cilindriche

$$\begin{aligned} u_r &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \right) \\ u_\phi &= \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \\ u_z &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rv_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right) \end{aligned}$$

e in coordinate sferiche

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta} (v_\phi \sin \vartheta) - \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \phi} \right) \\ u_\vartheta &= \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (rv_\phi) \right) \\ u_\phi &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rv_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} \right). \end{aligned}$$

### 1.2.4 Operatori differenziali del secondo ordine

Tra gli operatori del secondo ordine che risultano ammissibili si ricordino le seguenti notevoli relazioni:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \varphi) = 0$$

essendo il gradiente un vettore irrotazionale. Inoltre

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = 0$$

essendo il rotore un vettore indivergente.

Molto importante è l'*operatore di Laplace* ottenuto applicando consecutivamente ad una funzione scalare prima il gradiente e successivamente la divergenza:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \varphi) = \nabla^2 \varphi.$$

In coordinate cartesiane vale

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

In coordinate polari  $r, \phi$  (problemi bidimensionali):

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2}.$$

In coordinate cilindriche  $r, \vartheta, z$ :

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

In coordinate sferiche  $r, \vartheta, \phi$ :

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\varphi) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2}.$$

Inoltre vale:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \vec{\nabla}^2 \vec{u}$$

nella quale compare il laplaciano vettoriale che risulta definito da quest'ultima espressione. Valgono in particolare le seguenti espressioni del laplaciano vettoriale: in coordinate cartesiane

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla}^2 \vec{u})_x &= \nabla^2 u_x \\ (\vec{\nabla}^2 \vec{u})_y &= \nabla^2 u_y \\ (\vec{\nabla}^2 \vec{u})_z &= \nabla^2 u_z, \end{aligned}$$

in coordinate cilindriche

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla}^2 \vec{u})_r &= \nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \\ (\vec{\nabla}^2 \vec{u})_\phi &= \nabla^2 u_\phi - \frac{u_\phi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} \\ (\vec{\nabla}^2 \vec{u})_z &= \nabla^2 u_z, \end{aligned}$$

mentre in coordinate sferiche

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla}^2 \vec{u})_r &= \nabla^2 u_r - \frac{2u_r}{r^2} - \frac{2u_\vartheta}{r^2} \cot \vartheta - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} - \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \\ (\vec{\nabla}^2 \vec{u})_\vartheta &= \nabla^2 u_\vartheta - \frac{u_\vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} - \frac{2 \cot \vartheta}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \\ (\vec{\nabla}^2 \vec{u})_\phi &= \nabla^2 u_\phi - \frac{u_\phi}{r^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{2}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{2 \cot \vartheta}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \phi}. \end{aligned}$$

### 1.3 Teoremi

Per un vettore,  $\vec{u}$ , definito in una regione  $\tau$ , dello spazio ordinario, delimitata da una superficie chiusa  $S$ , vale il seguente teorema della divergenza (o di Gauss)

$$\oint_S \vec{u} \cdot \vec{n} dS = \int \int \int_{\tau} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} d\tau, \quad (1.9)$$

in cui  $\vec{n}$  rappresenta il versore normale in ogni punto della superficie limite  $S$ , orientato nella direzione uscente.

Vale inoltre anche il seguente teorema (di Stokes) in riferimento ad una qualsiasi superficie aperta  $S$  che si appoggi tuttavia ad una stessa linea chiusa,  $\gamma$ , come contorno

$$\int_{\gamma} \vec{u} \cdot \vec{t} dl = \int \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \cdot \vec{n} dS. \quad (1.10)$$

La tangente,  $\vec{t}$ , in ogni punto alla linea chiusa che contorna la superficie e la normale,  $\vec{n}$ , alla superficie stessa in ogni suo punto, devono essere correlate mediante la regola della vite destrorsa.

# Capitolo 2

## Il campo elettromagnetico

### 2.1 Le leggi del campo elettromagnetico

In questo capitolo, vengono ripresi i risultati fondamentali dell'elettromagnetismo classico sui quali si basano gli argomenti trattati nei capitoli successivi.

La nozione di *campo* si introduce per schematizzare gli effetti delle interazioni a distanza come quelle che sperimenta, ad esempio, una carica elettrica nell'attraversare, con velocità  $v$ , una regione di spazio in un intervallo di tempo in cui agiscono le sorgenti del campo stesso. Le sorgenti del campo essendo costituite da distribuzioni non nulle di carica elettrica e/o di densità di corrente elettrica nello spazio.

#### 2.1.1 Equazioni del campo in forma locale

Il campo elettromagnetico dipende dalle sue sorgenti in maniera complessa: le relazioni intercorrenti tra i campi (effetti) e le relative sorgenti (cause) sono esplicitate matematicamente dalle ben note equazioni di Maxwell che, nel vuoto (in aria) ed in forma locale, si possono scrivere

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \left( \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right).\end{aligned}\tag{2.1}$$

Nelle (2.1),  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  rappresentano due campi vettoriali, ossia rispettivamente: *campo elettrico*  $\vec{E}$ , e campo di *induzione magnetica*  $\vec{B}$ . Le grandezze:  $\rho$ , ossia la densità volumetrica di carica elettrica, e  $\vec{J}$ , vettore densità di corrente elettrica, rappresentano le sorgenti di tali campi.

Dalla fisica, è noto che le unità di misura sono V/m (Volt su metro) per il campo elettrico, T (Tesla) per il campo di induzione magnetica (detto anche, più semplicemente, induzione magnetica), Cm<sup>-3</sup> (Coulomb su metro cubo) per la densità volumetrica di carica e Am<sup>-2</sup> (Ampère su metro quadrato) per la densità di corrente elettrica.

Le costanti  $\epsilon_0$  e  $\mu_0$  sono la costante dielettrica e la permeabilità magnetica del vuoto che si misurano in F/m (Faraday su metro) ed H/m (Henry su metro) rispettivamente.

L'interazione che sperimenta una carica esploratrice,  $q$ , di dimensioni puntiformi, che si muova in un campo elettromagnetico con velocità  $v$ , è costituita da un termine coulombiano cui si somma quella cosiddetta di Lorentz

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (2.2)$$

Si noti che a seconda del riferimento prescelto per rappresentare i fenomeni, la (2.2) può ridursi al solo termine coulombiano se il riferimento è solidale alla carica  $q$  per cui  $\vec{v} = 0$ . Si consideri, in proposito la figura 2.1 in cui viene mostrata l'interazione che una carica positiva puntiforme sperimenta muovendosi entro un campo elettromagnetico con velocità diversa da zero rispetto ad un riferimento inerziale.

Se la distribuzione di carica elettrica netta è pari a zero ma esiste una distribuzione non nulla di densità di corrente  $\vec{J}$ , la (2.2) fornisce la forza che agisce sulla quantità di carica in movimento per unità di volume

$$\vec{F} = \vec{J} \times \vec{B}. \quad (2.3)$$

All'interno dei mezzi materiali, si verificano ulteriormente i fenomeni di polarizzazione nei confronti del campo elettrico e di magnetizzazione nei confronti dell'induzione magnetica. In particolare, la polarizzazione, introducendo una distribuzione di cariche che comporta una riduzione della carica complessiva, provoca un abbassamento del campo elettrico rispetto al vuoto. In un mezzo lineare, la polarizzazione è proporzionale al campo elettrico che l'ha prodotta, ossia

$$\vec{P} = \chi_e \vec{E}, \quad (2.4)$$

dove  $\chi_e$  rappresenta uno scalare adimensionale, per cui, nel dielettrico, il campo elettrico può essere decomposto nella somma di due contributi

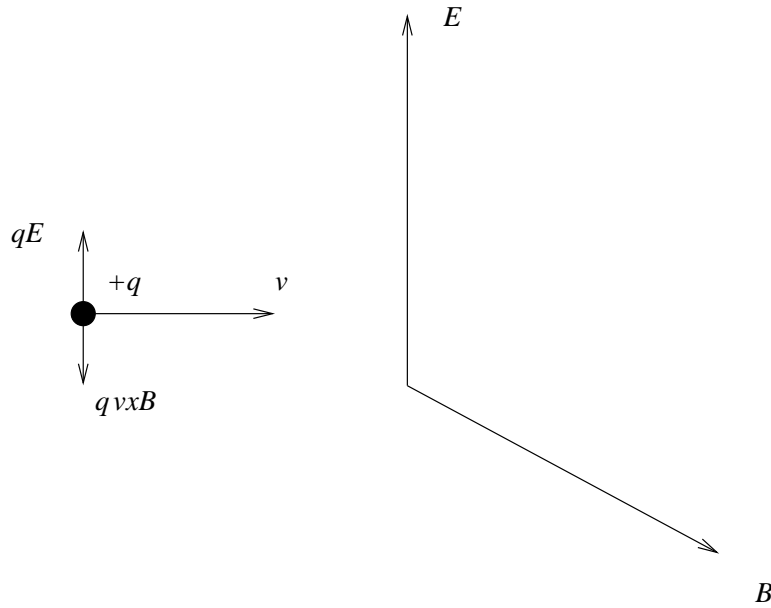


Figura 2.1: Componenti della forza di Lorentz agenti su una carica puntiforme in moto con velocità  $v$  rispetto ad un riferimento inerziale in una regione di spazio in cui è presente un campo elettromagnetico.

dei quali l'uno pari a quello prodotto dalla densità delle cariche libere, l'altro dalla densità delle cariche di polarizzazione,  $\rho_p$ . La prima delle equazioni di Maxwell si può riscrivere

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho + \rho_p}{\varepsilon_0},$$

da cui

$$\varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho + \rho_p,$$

e, considerando le cariche vincolate quali sorgenti di un contributo di polarizzazione  $\vec{P}$  del campo elettrico, si può scrivere

$$\varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = \rho_p.$$

Per sostituzione e per la linearità dell'operatore di divergenza, si ottiene quindi

$$\varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} - \vec{P}) = \rho,$$

ed infine, se vale la (2.4)

$$\vec{\nabla} \varepsilon_0 (1 - \chi_e) \vec{E} = \rho. \quad (2.5)$$

Si definisce il vettore *spostamento elettrico*  $\vec{D} = \varepsilon_0(1 - \chi_e)\vec{E}$ , che si misura in C/mq (Coulomb su metro quadrato), per cui si può, infine, scrivere

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (2.6)$$

nella quale compare a secondo membro solo la densità delle cariche libere mentre tiene conto indirettamente della densità di carica di polarizzazione tramite la costante dielettrica propria di ciascun materiale

$$\varepsilon = \varepsilon_0(1 - \chi_e) = \varepsilon_r \varepsilon_0 \quad (2.7)$$

essendo  $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$  la cosiddetta costante dielettrica relativa.

Un ragionamento analogo sulla capacità dei materiali di presentare una densità di corrente di magnetizzazione sotto l'effetto di un campo di induzione magnetica, porta a considerare anche per il campo di induzione magnetica la dipendenza da due contributi distinti, ossia

$$\vec{\nabla} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{J} + \vec{J}_m,$$

dei quali il primo,  $\vec{J}$ , dovuto alle correnti libere, il secondo essendo relativo alle correnti di magnetizzazione. Se il mezzo è lineare, si può definire la magnetizzazione per unità di volume  $\vec{M}$  legata alla densità di corrente di magnetizzazione

$$\vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{J}_m,$$

e, pertanto, combinando le ultime due relazioni

$$\vec{\nabla} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{J} + \vec{\nabla} \times \vec{M}.$$

Per le proprietà dell'operatore *nabla*, si perviene successivamente alla

$$\vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{J},$$

che consente di definire il termine tra parentesi come un altro vettore detto *campo magnetico*

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M},$$

con dimensioni pari ad A/m. Secondo questo approccio, in ogni mezzo lineare si può scrivere semplicemente

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$$

che sostituisce l'ultima delle (2.1) entro i mezzi materiali lineari (per semplicità si è considerato il caso stazionario).

La relazione tra  $\vec{H}$  e  $\vec{B}$  nel mezzo materiale (la cosiddetta *equazione di legame materiale*) si può ottenere assumendo  $\vec{M}$ , per la linearità, proporzionale ad  $\vec{H}$ , ossia

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}, \quad (2.8)$$

mediante un coefficiente adimensionale,  $\chi_m$ , detto *suscettività magnetica*, per cui

$$\frac{\vec{B}}{\mu_0} = (1 + \chi_m) \vec{H},$$

e, pertanto,

$$\mu_0(1 + \chi_m) \vec{H} = \vec{B},$$

nella quale si può introdurre la permeabilità magnetica propria di ciascun materiale:  $\mu = \mu_0(1 + \chi_m) = \mu_r \mu_0$ .

In conclusione, nei mezzi materiali le equazioni di Maxwell in forma locale si possono scrivere

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

A queste vanno aggiunte le equazioni di legame materiale

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} \end{aligned}$$

per ciascun mezzo materiale attraversato dal campo elettromagnetico.

### 2.1.2 Equazioni in forma integrale

Integrando sul volume del dominio le equazioni di Maxwell in forma locale i cui termini di sorgente sono densità volumetriche e sulla superficie

di contorno del dominio quelle i cui termini di sorgente sono densità superficiali, si ottiene dalla prima delle (2.9)

$$\int \int \int_{\tau} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} d\tau = \int \int \int_{\tau} \rho d\tau,$$

la quale, tramite il teorema della divergenza (o teorema di Gauss) (1.9) applicato al primo membro, e osservando che il secondo membro rappresenta la quantità netta di carica contenuta nello spazio considerato, diviene

$$\oint \oint_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS = Q. \quad (2.10)$$

La (2.10) asserisce che il flusso del vettore spostamento elettrico attraverso una qualsiasi superficie chiusa è pari alla carica totale racchiusa entro tale superficie. Questo risultato passa sotto il nome di *Legge di Gauss*.

Analogamente, integrando su un volume la terza equazione in forma locale:

$$\int \int \int_{\tau} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} d\tau = 0,$$

si ottiene, applicando ancora il teorema della divergenza sopra ricordato,

$$\oint \oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0. \quad (2.11)$$

Quest'ultimo risultato attesta che l'induzione magnetica è un vettore le cui linee non possono avere inizio o fine in punti interni ad una porzione finita dello spazio, ossia che si tratta di linee chiuse<sup>1</sup>. In particolare, tagliando (lungo una linea chiusa qualsiasi) la superficie chiusa  $S$  in due metà aperte  $S_u$  ed  $S_e$  tali che  $S = S_u \cup S_e$ , si può scrivere

$$\oint \oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \int \int_{S_u} \vec{B} \cdot \vec{n} dS_u + \int \int_{S_e} \vec{B} \cdot \vec{n} dS_e = 0,$$

da cui si ricava

$$\int \int_{S_u} \vec{B} \cdot \vec{n} dS_u = - \int \int_{S_e} \vec{B} \cdot \vec{n} dS_e$$

---

<sup>1</sup>Unica eccezione è rappresentata da una linea che, pur restando contenuta entro una porzione finita dello spazio, non si richiude su se stessa se non dopo infiniti passaggi che la vedono attraversare tutti gli infiniti punti del dominio spaziale (*linea ergodica*).

e, mutando l'orientazione originaria della normale alla superficie  $S_e$ ,

$$\int \int_{S_u} \vec{B} \cdot \vec{n} dS_u = - \int \int_{S_e} \vec{B} \cdot (-\vec{n}) dS_e = \int \int_{S_e} \vec{B} \cdot \vec{n} dS_e$$

che dimostra la costanza del flusso del vettore  $\vec{B}$  per qualsiasi superficie che ammetta la stessa linea chiusa come contorno. Questa proprietà è tipica dei *vettori a divergenza nulla* o, come si suol dire con altra terminologia equivalente, *solenoidali*.

Integrando la seconda equazione di Maxwell in forma locale su di una superficie aperta qualsiasi si può scrivere

$$\int \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \vec{n} dS = - \int \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS,$$

che, mediante il teorema di Stokes (1.10) applicato all'integrale a primo membro, diviene

$$\oint_{\gamma} \vec{E} \cdot \vec{t} dl = - \int \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS.$$

Se la linea  $\gamma$  non varia nel tempo, allora per la verificata solenoidalità di  $\vec{B}$ , l'integrale a secondo membro non varia nel tempo per il variare di  $S$  ed è lecito anticipare la derivata

$$\oint_{\gamma} \vec{E} \cdot \vec{t} dl = - \frac{\partial}{\partial t} \int \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = - \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (2.12)$$

dove il simbolo  $\phi$  sta ad indicare il flusso dell'induzione magnetica concatenato alla linea  $\gamma$  quale si evince dalla (2.12). Questo risultato va sotto il nome di *legge di Faraday-Neumann-Lenz* o dell'*induzione elettrica*.

A primo membro si riconosce una forza elettromotrice (o tensione) che risulta prodotta, lungo la linea  $\gamma$ , dalle variazioni, cambiate di segno, del flusso dell'induzione magnetica concatenato con la linea stessa. Ciò significa che diminuzioni del flusso concatenato sono responsabili di f.e.m. di segno positivo e, viceversa, incrementi di flusso concatenato provocano f.e.m. di segno negativo (segno valutato rispetto all'orientazione positiva stabilita per la tangente della linea  $\gamma$ ).

Da ultimo, ripetiamo l'integrazione su una superficie aperta qualsiasi, della quarta delle (2.9):

$$\int \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot \vec{n} dS = \int \int_S (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot \vec{n} dS.$$

Applicando il teorema di Stokes al primo membro, si ottiene

$$\oint_{\gamma} \vec{H} \cdot \vec{t} dl = \int \int_S \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot \vec{n} dS, \quad (2.13)$$

in cui la superficie  $S$  può essere una qualsiasi tra le infinite che si appoggiano alla linea  $\gamma$ . L'integrale a primo membro rappresenta la circuitazione del campo magnetico che funge da forza magnetomotrice. Essa risulta proporzionale alla corrente totale concatenata con la linea chiusa. La corrente totale è data dalla cosiddetta corrente di conduzione

$$\int \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS,$$

e dalla corrente di spostamento

$$\int \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS.$$

Il risultato (2.13) va sotto il nome di *legge della circuitazione del campo magnetico* o *legge di Ampère-Maxwell*.

## 2.2 Condizioni stazionarie

In condizioni stazionarie, nei mezzi lineari le (2.9) si riducono al seguente sistema

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{J}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

dal quale si evince che, mancando i termini di sorgente legati alle derivate temporali, il campo elettrostatico risulta irrotazionale (cioè a rotazionale nullo) in tutto lo spazio e deriva soltanto dalla distribuzione delle cariche elettriche, mentre il campo magnetostatico viene a dipendere solo dalla distribuzione del vettore densità di corrente di conduzione.

## 2.3 Condizioni quasi stazionarie

Nel caso di fenomeni lentamente variabili, si è soliti parlare di condizioni quasi-stazionarie che risultano un'approssimazione che fa comodo in molti casi. Per distinguere queste condizioni da quelle stazionarie propriamente dette, si distinguono condizioni quasi stazionarie elettriche, e quasi stazionarie magnetiche, condizioni che possono essere realizzate anche in particolari regioni spazio-temporali.

### 2.3.1 Condizioni quasistazionarie elettriche

Si verificano nelle regioni e negli intervalli in cui si può trascurare la derivata del vettore spostamento elettrico, ossia le equazioni diventano

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho \\
 \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
 \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\
 \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{J}.
 \end{aligned}
 \tag{2.15}$$

### 2.3.2 Condizioni quasistazionarie magnetiche

In analogia alle precedenti, nelle regioni dello spazio-tempo in cui è trascurabile la sola derivata temporale dell'induzione magnetica, vale il seguente sistema approssimato

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho \\
 \vec{\nabla} \times \vec{E} &= 0 \\
 \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\
 \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

## 2.4 Soluzione ai problemi di campo

Di notevole importanza è la determinazione dei campi elettrico e/o magnetico in condizioni stazionarie e/o quasi-stazionarie. Per semplicità assumiamo di trattare il caso stazionario in cui vi è netta separazione tra la determinazione del campo elettrico e quella del campo magnetico.

## 2.5 Campo elettrico stazionario

Se il dominio in cui esiste il campo elettrico è a connessione lineare semplice<sup>2</sup>, il campo è derivabile come gradiente<sup>3</sup> di una funzione scalare continua dello spazio detta *potenziale scalare*. Per consuetudine, se chiamiamo  $V$  la funzione potenziale scalare, si definisce

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V. \quad (2.17)$$

Introducendo questa espressione nella prima delle (2.14) si ottiene

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}V = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (2.18)$$

in cui si è tenuto conto del fatto che  $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ . La divergenza del gradiente costituisce un operatore differenziale del secondo ordine che prende il nome di Laplaciano (simbolo  $\Delta$  o più frequentemente  $\nabla^2$ ) mediante il quale la (2.18) si scrive nella forma

$$\nabla^2V = -\frac{\rho}{\varepsilon}, \quad (2.19)$$

detta *equazione di Poisson scalare*. Essa consente la determinazione del potenziale incognito, nota la distribuzione delle sorgenti e le condizioni al contorno sulla superficie al finito del dominio e/o di regolarità all'infinito se il dominio si estende all'intero spazio. In quest'ultimo caso la soluzione per il potenziale vale

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \int \int_{\tau} \frac{\rho}{r} d\tau \quad (2.20)$$

in ogni punto ad una distanza  $r$  molto grande rispetto alla regione  $\tau$  in cui è distribuita la carica con densità volumetrica  $\rho$ . Ricordando la (2.17), dal potenziale scalare si ottiene il vettore campo elettrostatico

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \int \int_{\tau} \frac{\rho}{r} d\tau = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \int \int_{\tau} \frac{\rho d\tau}{r^2} \vec{r} \quad (2.21)$$

avente direzione radiale in quanto le linee di livello del potenziale scalare sono superfici sferiche centrate nel punto (baricentro della distribuzione delle cariche elettriche) in cui si può ritenere concentrata la carica distribuita nel volume  $\tau$ .

<sup>2</sup>Un dominio si può definire tale quando una linea semplice chiusa contenuta al suo interno può essere ridotta, per deformazione continua, ad un punto senza uscire dal dominio né perdere la propria continuità.

<sup>3</sup>Si faccia riferimento all'appendice A per i richiami fondamentali sugli operatori che verranno introdotti da qui in avanti.

## 2.6 Campo magnetico stazionario

Il campo stazionario di induzione magnetica è governato dalle due equazioni

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{J},\end{aligned}\tag{2.22}$$

dalle quali si evince che  $\vec{B}$  è un vettore *indivergente* e può essere fatto derivare come rotazionale da un potenziale vettore,  $\vec{A}$ <sup>4</sup> ad un sol valore e continuo, ossia si può porre:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}.\tag{2.23}$$

Sostituendo nella seconda delle (2.22) si ottiene l'espressione

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \mu_0 \vec{J},$$

onde occorre ricordare che il doppio prodotto vettoriale si può scrivere

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A},$$

ed essendo il potenziale vettore definito a meno del gradiente di uno scalare arbitrario, si può definire il potenziale vettore mediante la scelta (“gauge”) di Coulomb

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0,$$

ossia si può scegliere un potenziale vettore indivergente tramite il quale si ottiene l'*equazione di Poisson vettoriale*

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}.\tag{2.24}$$

A primo membro della (2.24) compare il cosiddetto *Laplaciano vettoriale* che, nelle coordinate cartesiane ortogonali, si decompone nei tre laplaciani scalari

$$\begin{aligned}\nabla^2 A_x &= -\mu_0 J_x \\ \nabla^2 A_y &= -\mu_0 J_y \\ \nabla^2 A_z &= -\mu_0 J_z\end{aligned}$$

---

<sup>4</sup>Ciò vale a rigore nei domini a connessione superficiale semplice per i quali ogni superficie chiusa può essere ricondotta ad un punto per deformazione continua senza uscire dal dominio e restando chiusa durante il processo di deformazione.

che ammettono la soluzione dell'equazione di Poisson scalare. Per analogia, quindi, con la soluzione del campo elettrostatico nell'intero spazio, anche la (2.24) ammette a sufficiente distanza dalla regione in cui sono poste le sorgenti, la soluzione

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \int \int_{\tau} \frac{\vec{J}}{r} d\tau \quad (2.25)$$

che consente di determinare il campo di induzione magnetica

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \int \int \int_{\tau} \frac{\vec{J}}{r} d\tau = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \int \int_{\tau} \frac{\vec{J} \times \vec{r}}{r^2} d\tau. \quad (2.26)$$

Un'osservazione di carattere puramente matematico, ma che risulta molto comoda per gli sviluppi successivi, è quella che, in base alla (2.26), consente di scrivere

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J} \times \vec{r}}{r^2} d\tau \quad (2.27)$$

detta *prima legge di Laplace*. La (2.27) consente di ricavare il campo di induzione magnetica quando la geometria delle sorgenti è relativamente semplice. E' ben noto, dai corsi di fisica, come dalla (2.27) si ottenga, ad esempio, la legge di Biot-Savart che stabilisce la distribuzione nello spazio del campo magnetico prodotto da una corrente filiforme rettilinea ed indefinitamente estesa. Rimandando ai testi di fisica elementare per la descrizione del procedimento, si ricorda sinteticamente il risultato che tale campo ha una simmetria cilindrica e, in ogni piano normale al supporto della corrente  $I$ , ha, punto per punto, intensità che dipende solo dalla distanza  $r$ , dalla sorgente ed è diretto, secondo quanto previsto dal prodotto vettoriale, lungo la direzione ortogonale al piano passante per la retta supporto della corrente ed il generico raggio vettore  $r$ , ossia la direzione,  $\phi$ , tangente alla circonferenza di raggio  $r$ :

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \vec{e}_{\phi}. \quad (2.28)$$

Se si considera una corrente avente per supporto una circonferenza, il campo magnetico ammetterà come linea, tra le altre, la retta ortogonale al piano della circonferenza e passante per il centro della stessa come rappresentato in figura 2.2 nella quale vengono mostrate anche altre linee quali si potrebbero ricavare dalla (2.27).

La distribuzione delle linee di flusso di un campo denotano una diversa intensità del campo stesso. In particolare, il campo è più intenso

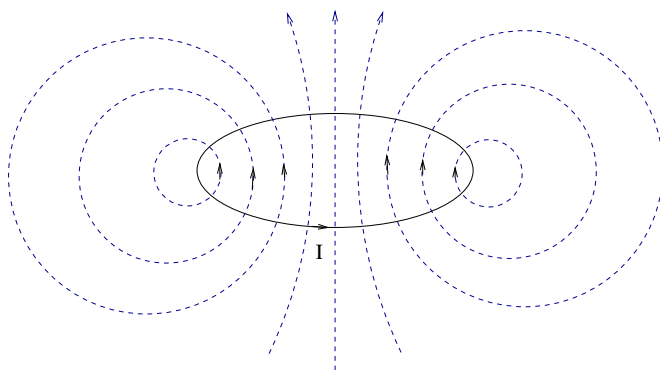


Figura 2.2: Campo di induzione magnetica (linee di flusso in tratteggio) prodotto da una corrente filiforme circolare (spira).

nelle regioni dello spazio in cui le linee sono più dense. Dalla figura è facile convincersi che il campo è più intenso nella regione piana delimitata dalla spira giacché una linea del campo magnetico che tocchi un punto qualsiasi dello spazio deve necessariamente essere concatenata con la spira. Facendo circolare la corrente attraverso un elevato numero di spire dello stesso raggio e concentriche (solenoidi) come rappresentato in figura 2.3, si accentua la differenza di intensità tra il campo interno al solenoide rispetto a quello esterno con il risultato di poter spesso trascurare il campo esterno (solenoidi indefinitamente estesi o chiusi su se stessi a guisa di toro).

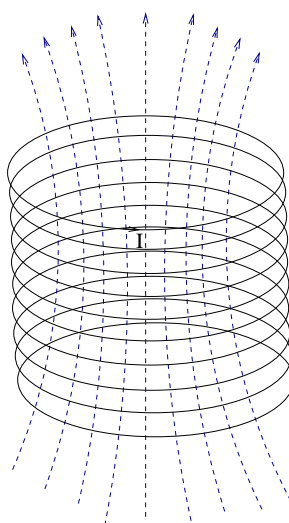


Figura 2.3: Campo di induzione magnetica (linee di flusso in tratteggio) prodotto da un solenoide.

# Capitolo 3

## Applicazioni magnetiche

### 3.1 Introduzione

I fenomeni del campo magnetico quasi-stazionario sono sfruttati in importanti applicazioni che vanno dai *circuiti magnetici* alle *macchine elettriche*. I circuiti magnetici, essendo funzionali alla realizzazione delle macchine elettriche, verranno illustrati per primi.

La definizione di circuito magnetico coincide con quella di *tubo di flusso dell'induzione magnetica*. Nel capitolo precedente si è potuto vedere quanto risulti complessa la determinazione del campo di induzione magnetica se le sorgenti non presentano particolari simmetrie geometriche. Inoltre, il problema è reso più complicato dal fatto che l'induzione magnetica è in grado di invadere tutto lo spazio essendo anche il vuoto magneticamente permeabile.

Si è visto come sorgenti del campo magnetico, dotate di un adatto supporto, consentano di concentrare il campo in determinate regioni dello spazio rispetto ad altre. Tuttavia se lo spazio è occupato da un mezzo omogeneo, difficilmente questo effetto soltanto permette la sicura determinazione di tutti i tubi di flusso e quindi della rete magnetica corrispondente. E' quanto mai opportuno, quindi, esaminare le proprietà magnetiche dei materiali di più comune reperibilità, allo scopo di valutare la possibilità di facilitare la determinazione dei circuiti magnetici mediante la giustapposizione di opportuni materiali dotati di permeabilità magnetiche assai differenti tra loro.

## 3.2 Comportamento magnetico dei materiali

A seconda della struttura microscopica, ogni materiale reagisce ad un campo di induzione magnetica esterno esibendo una *magnetizzazione*, ossia un momento di dipolo magnetico netto per unità di volume. Se il materiale è lineare, si è visto che la magnetizzazione è proporzionale al campo magnetico  $\vec{H}$  attraverso un coefficiente adimensionale,  $\chi_m$ , detto suscettività magnetica. Inoltre si può definire una permeabilità relativa propria di ciascun materiale  $\mu_r = 1 + \chi_m$ .

In base ai valori della permeabilità relativa, i mezzi materiali si possono suddividere in:

- diamagnetici;
- paramagnetici;
- ferromagnetici.

Diamagnetici sono i mezzi materiali per i quali risulta

$$\mu_r \lesssim 1,$$

ossia quando hanno suscettività magnetica modesta e di segno negativo. Il diamagnetismo è tipico dei materiali per i quali i momenti magnetici degli elettroni dovuti allo spin ed alla rotazione attorno al nucleo si compensano quasi totalmente. Ciò fa sì che il materiale sia poco sensibile ad un campo magnetico esterno. Sono diamagnetici diversi metalli d'uso comune in elettrotecnica (come il rame) e non metalli quali, ad esempio, il silicio ed il cloruro di sodio. Tuttavia la suscettività si mantiene in tutti i casi molto piccola in valore assoluto e dell'ordine di  $-10^{-5}$ . Sono perfettamente diamagnetici ( $\chi_m = -1$ ) i cosiddetti *superconduttori* del I tipo<sup>1</sup> in grado di espellere completamente dal loro interno un campo stazionario di induzione magnetica<sup>2</sup>.

Per i materiali paramagnetici risulta invece

$$\mu_r \gtrsim 1,$$

---

<sup>1</sup>A questa categoria di superconduttori appartengono i metalli puri a temperature prossime allo zero assoluto.

<sup>2</sup>Ciò è rigorosamente vero entro un valore massimo del campo che dipende oltre che dalla temperatura (purché al di sotto della soglia che determina superconduttività) anche dalla densità di corrente che attraversa il superconduttore.

essendo dotati di un sia pur minimo grado di magnetizzazione per il fatto che i momenti magnetici legati alle orbite e allo spin degli elettroni non si compensano esattamente. A differenza del diamagnetismo, il paramagnetismo dipende, in genere, anche dalla temperatura. I più comuni mezzi paramagnetici sono l'aria, il platino, il tungsteno, il potassio ed altri che presentano suscettività magnetiche dipendenti dalla temperatura e variabili tra  $10^{-5} \div 10^{-3}$ .

Il ferromagnetismo, infine, si verifica nei materiali che possiedono a livello atomico momenti magnetici permanenti di notevole entità relativa. La denominazione deriva dal fatto che il ferro è il primo materiale della categoria di cui si siano osservate le proprietà magnetiche. La categoria comprende, oltre al ferro, solo materiali metallici come, ad esempio, il cobalto, il nickel, nonché leghe contenenti ferro e/o cobalto e/o nickel. Questi materiali sono di estrema importanza tecnica tanto che si può affermare che è grazie all'esistenza dei materiali ferromagnetici che è possibile la realizzazione delle macchine elettriche che godono oggidì di così ampia e varia diffusione. A differenza di tutti gli altri, i materiali ferromagnetici presentano alcune caratteristiche peculiari:

- raggiungono valori di magnetizzazione macroscopica assai elevati;
- mantengono una elevata magnetizzazione residua anche dopo che il campo magnetico esterno è stato rimosso (magneti permanenti);
- possono perdere la loro magnetizzazione solo se portati al di sopra di una temperatura limite (la cosiddetta *temperatura di Curie*) solitamente piuttosto elevata (ad esempio, per il Fe vale circa 770 °C);
- hanno una relazione tra  $\vec{B}$  ed  $\vec{H}$  che *non è lineare*.

Quanto sopra evidenziato si può visualizzare mediante la curva sul piano  $B - H$ , caratterizzata da un andamento ciclico particolare, detto *ciclo di isteresi*, un esempio della quale è mostrato in figura 3.1. Dalla figura si può notare che l'induzione  $\vec{B}$  aumenta notevolmente con  $\vec{H}$  a partire da una condizione iniziale in cui il materiale non è mai stato precedentemente sottoposto a campi magnetici. Con il progressivo aumentare del campo magnetico, l'induzione tende ad aumentare meno velocemente sino ad un valore (punto a in figura) oltre il quale aumenti successivi di  $\vec{H}$  comportano aumenti di  $\vec{B}$  di entità relativamente molto minore,

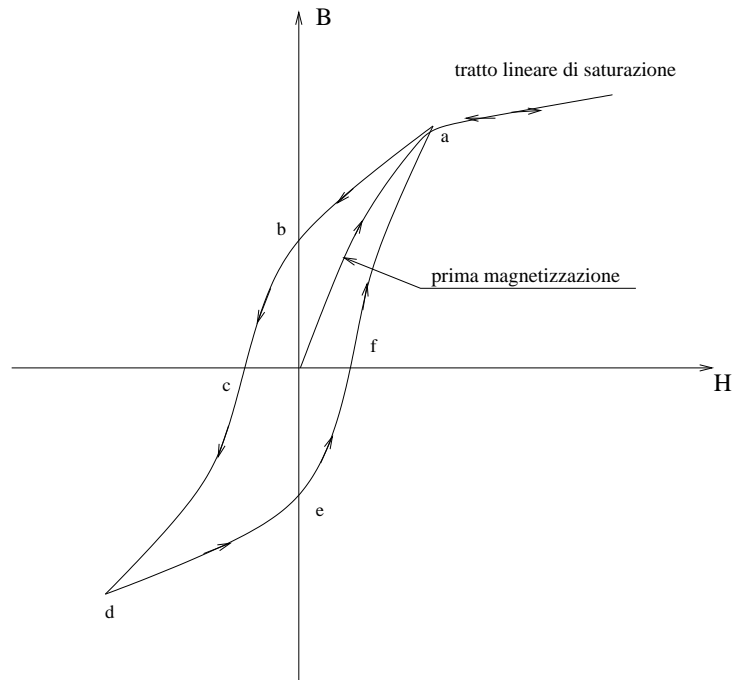


Figura 3.1: Ciclo di isteresi.

praticamente coincidente con gli aumenti che si registrano in aria. Questa è la condizione cosiddetta di  *saturazione*  del materiale ferromagnetico. Sin qui, il tratto della caratteristica di magnetizzazione prende il nome di curva di  *prima magnetizzazione* . Se da questa situazione si diminuisce progressivamente l'intensità del campo magnetico  $\vec{H}$ , i valori di induzione non diminuiscono secondo l'andamento visto prima, ma individuano punti differenti tracciando un tratto di curva che interseca il semiasse positivo delle ordinate in un punto b. In corrispondenza a tale intersezione, si definisce  *induzione residua*  il valore di  $\vec{B}$  che permane anche quando il campo magnetico viene eliminato. Soltanto applicando un campo magnetico inverso di intensità crescente, si ottiene una ulteriore diminuzione dell'induzione sino al suo annullamento che avviene in corrispondenza al cosiddetto campo magnetico  *coercitivo*  (punto c). Continuando ad aumentare l'intensità del campo magnetico, l'induzione si inverte e la caratteristica passa nel terzo quadrante. Anche in questa regione della caratteristica si assiste al fenomeno della saturazione che si raggiunge per un valore assoluto del campo magnetico pari a quello corrispondente alla saturazione nel primo quadrante della curva (punto

d). Invertendo nuovamente il campo magnetico, si percorre un tratto (d-e-f-a, secondo le frecce in figura 3.1) che va a chiudere la curva di magnetizzazione ed è caratterizzato da simmetria di rotazione rispetto al tratto precedente (a-b-c-d). Continuando a variare in maniera ciclica il campo magnetico, l'induzione continua a ripercorrere i vari tratti della stessa curva chiusa che prende il nome di *ciclo di isteresi* del materiale.

Dal punto di vista fenomenologico, il ciclo di isteresi si interpreta ammettendo che nel materiale ferromagnetico siano presenti regioni di dimensioni microscopiche (formate, tuttavia, da un enorme numero di atomi) i cui atomi hanno tutti magnetizzazione equiversa. Tali regioni sono denominate *domini di Weiss*. Nel caso in cui il materiale non sia stato in precedenza sottoposto ad un campo magnetico (o sia stato portato alla temperatura di Curie), i vettori magnetizzazione dei domini sono orientati casualmente in tutte le direzioni dello spazio, sicchè l'effetto macroscopico netto è, appunto, quello di un materiale non magnetizzato. L'azione di un campo magnetico esterno applicato al materiale comporta che i momenti magnetici dei domini tendono ad allinearsi a questo come l'ago di una bussola. Per piccoli valori del campo applicato, questo fenomeno risulta reversibile e l'annullamento del campo stesso riporta il materiale allo stato iniziale. Se, tuttavia, l'intensità del campo esterno viene aumentata, i domini tendono ad orientarsi in maniera permanente rimodellandosi e accorrandosi in parte tra loro modificando così la loro struttura e dimensioni (le superfici di contorno dei domini dette *pareti di Bloch* si modificano permanentemente) e, soprattutto, mantenendo un'induzione magnetica netta allineata al campo inducente anche quando quest'ultimo viene soppresso (induzione residua). Il fenomeno della saturazione, che vede diminuire progressivamente la pendenza della curva (che rappresenta la permeabilità del materiale nei diversi punti della curva che tende, infine, al valore  $\mu_0$ ), si spiega con il fatto che quando tutti i domini si sono allineati lungo la direzione del campo magnetico applicato, il materiale non è più in grado di fornire un contributo all'aumento di  $\vec{B}$  il quale, pertanto, da quel valore in poi può crescere solo con la velocità con la quale cresce nel vuoto. Tipicamente la saturazione nei materiali magnetici avviene fra 1 o 2 T che sono valori molto elevati se paragonati all'induzione magnetica terrestre (da circa 20 a circa 70  $\mu\text{T}$  passando dall'equatore ai poli).

### 3.2.1 Considerazioni energetiche

A partire dall'energia prodotta dalla sorgente, che si può assumere quale bipolo di tipo induttivo, esprimiamo l'energia immagazzinata dai vettori del campo magnetico svincolandoci dalle variabili tensione e corrente del bipolo induttivo. Ossia:

$$W_a(t) = \int_{-\infty}^t v i dt = \int_{-\infty}^t N \frac{d\phi}{dt} i dt = \int_0^\phi N i d\phi, \quad (3.1)$$

in cui si è tenuto conto della relazione tra flusso magnetico concatenato e tensione già vista nella parte I di questi appunti e che qui si riporta per comodità:

$$v(t) = N \frac{d\phi}{dt},$$

dove si è tenuto distinto il valore del flusso magnetico,  $\phi$ , dal flusso magnetico concatenato attraverso il numero di spire  $N$  costante nel tempo. Ricordando la legge della circuitazione di Ampere, secondo la quale

$$Ni = Hl,$$

dove  $l$  è una qualsiasi linea chiusa ed, in particolare, qui si considera una linea di flusso del campo magnetico, e la relazione

$$d\phi = SdB$$

tra flusso magnetico ed induzione magnetica, in cui  $S$  rappresenta la sezione normale del tubo di flusso, possiamo riscrivere la (3.1) per un generico tubo di flusso

$$W(t) = \int_0^B lSHdB.$$

Notando, infine, che  $lS$  rappresenta il volume del generico tubo di flusso, è più interessante riferirsi all'energia per unità di volume

$$W_s(t) = \frac{W(t)}{Sl} = \int_0^B HdB. \quad (3.2)$$

Si noti dalla figura 3.2, che l'integrale che compare nella (3.2) può essere interpretato come l'area in grigio. Da ciò si evince che l'area racchiusa dal ciclo di isteresi rappresenta l'energia dissipata ad ogni ciclo per unità di

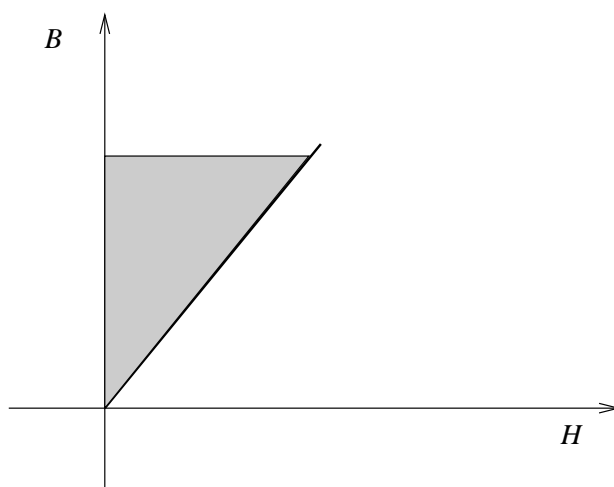


Figura 3.2: Energia specifica del campo magnetico.

volume del materiale ferromagnetico. Tale energia è convertita in calore. Ogni volta che un conduttore filiforme avvolto attorno ad un nucleo ferromagnetico (che costituisce un induttore non lineare) viene alimentato con corrente alternata, l'energia assorbita ad ogni semiperiodo è maggiore di quella restituita nel semiperiodo successivo in quanto una parte dell'energia è dissipata per isteresi dal nucleo venendo da esso convertita in calore. Una formula semiempirica che lega la potenza dissipata per unità di volume nel nucleo ferromagnetico alla frequenza, al valore massimo dell'induzione e alle caratteristiche del materiale (formula di Steinmetz) è la seguente:

$$P_{s,ist} = \eta f B^\alpha \quad \text{W/m}^3. \quad (3.3)$$

Nella (3.3),  $f$  indica la frequenza di variazione dell'induzione sinusoidale il cui valore massimo è  $B$ ,  $\alpha$  è un esponente compreso nell'intervallo  $[1.6, 2]$  che dipende del materiale;  $\eta$  è un coefficiente che pure dipende dal materiale.

I materiali ferromagnetici si dividono in due categorie a seconda che il ciclo di isteresi sia sottile o largo come mostrato in figura 3.3. I materiali con ciclo di isteresi sottile sono detti *dolci* e si preferiscono per tutte le applicazioni in corrente alternata o in tutti i casi in cui occorre minimizzare le perdite energetiche dovute a variazioni cicliche dell'induzione magnetica, quelli invece che presentano un ciclo di isteresi ampio, e caratterizzato da un'elevata induzione magnetica residua ed un elevato campo

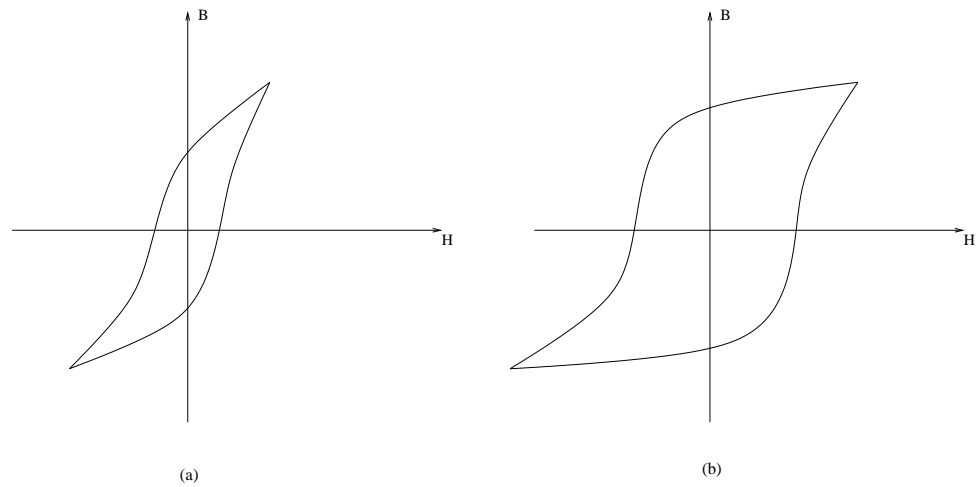


Figura 3.3: Cicli di isteresi di materiale dolce (a) e duro (b).

Tabella 3.1: Materiali ferromagnetici dolci

Materiale	Composizione	$\mu_{r,\max}$	$B_r$ (T)	$H_c$ (A/m)
Ferro puro	Fe	250000	1.4	4
Lamiera dinamo	96% Fe, 4% Si	7000	0.8	40
permalloy	78.5% Ni, 21.5% Fe	50000	0.6	4

coercitivo, sono detti *duri* e trovano la loro principale applicazione per la realizzazione di magneti permanenti. Nel caso dei materiali ferromagnetici duri,  $\alpha$  ed  $\eta$  assumono valori relativamente più elevati. Alcune caratteristiche di materiali ferromagnetici dolci sono riportate in tabella 3.1.

In tabella 3.2, sono riportate le caratteristiche salienti di alcuni esempi di materiali ferromagnetici duri.

I valori della permeabilità magnetica relativa dei materiali ferromagnetici variano lungo la curva di isteresi anche se, lontano dalla saturazione, si mantengono molto elevati. Si definisce *curva di magnetizzazione normale* la curva ottenuta a partire da diversi cicli di isteresi del materiale ferromagnetico stabilizzati per diversi valori di ampiezza dei campi  $B$  ed  $H$ . Per chiarire questa definizione si consideri quanto rappresentato in figura 3.4. In particolare, la curva in tratteggio, che rappresenta l'interpolazione tra i punti angolari dei diversi cicli di isteresi, costitu-

Tabella 3.2: Materiali ferromagnetici duri

Materiale	Composizione	$B  H _{\max}$ (J/m <sup>3</sup> )	$B_r$ (T)	$H_c$ (A/m)
Acciaio		1600	0.7	5000
Ferrite di bario	BaO·6Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	24000	0.8	140000
Alnico 8	7% Al, 14.5% Ni, 35% Co, 5% Cu, 5% Ti, resto Fe	32000	0.8	110000
Composto di Co e terre rare		95000	0.72	400000
Cobalto-Samaro	Sm-Co <sub>5</sub>	143000	0.85	630000

isce, appunto, la summenzionata curva di magnetizzazione normale. La sua forma è molto simile a quella della curva di prima magnetizzazione anche se, a differenza di questa, si estende anche nel terzo quadrante. Analizzando più in dettaglio la curva di magnetizzazione normale, si può evincere che non si dà un solo valore per la permeabilità magnetica del materiale ferromagnetico, trattandosi di una curva non lineare. Si può costruire un grafico che fornisce il valore della permeabilità del materiale in funzione di  $H$ , calcolato come tangente alla curva di magnetizzazione normale in ogni punto. Si ottengono curve di permeabilità del tipo disegnato in figura 3.5 che evidenziano un valore massimo.

### 3.3 Realizzazione pratica

Si è detto che un circuito magnetico è costituito da uno o più tubi di flusso del vettore induzione magnetica (tubi chiusi per la solenoidalità di  $\vec{B}$  stabilita dalla terza equazione di Maxwell valida in tutte le condizioni e per tutti i mezzi materiali). Se il vettore induzione magnetica incontra mezzi a permeabilità diversa, le sue linee vanno incontro alla rifrazione in corrispondenza alla superficie di separazione tra i mezzi. Dagli studi di

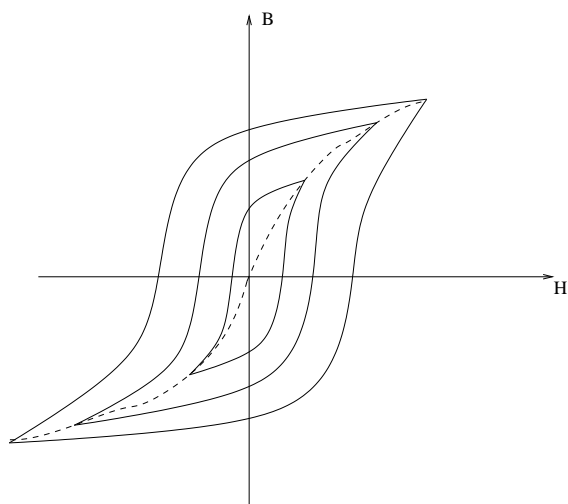


Figura 3.4: Curva di magnetizzazione normale.

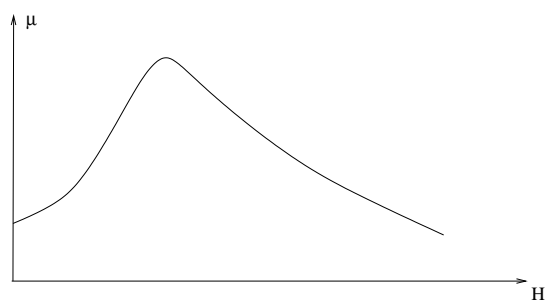


Figura 3.5: Curva di permeabilità magnetica.

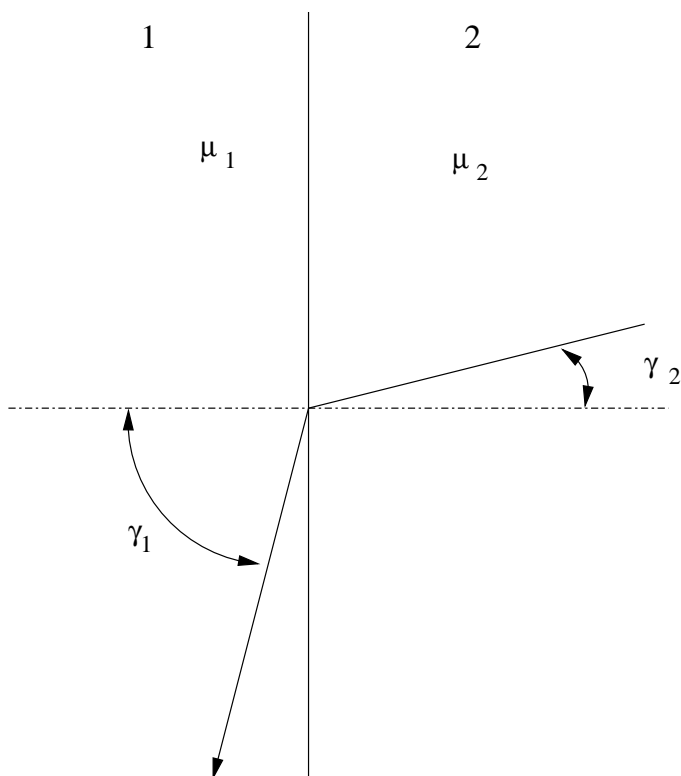
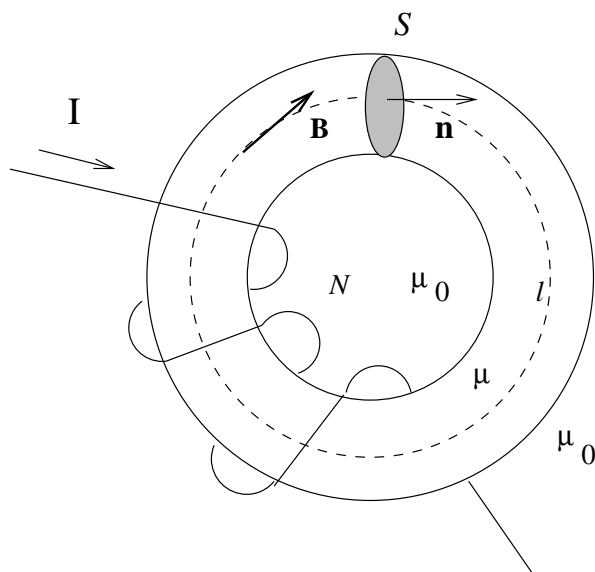


Figura 3.6: Rifrazione ad una superficie di interfaccia tra mezzi con differenti permeabilità magnetiche.

fisica, è noto che (escludendo il caso particolare in cui si dia una densità superficiale di corrente diversa da zero all'interfaccia) la rifrazione delle linee di  $\vec{B}$  segue la legge

$$\frac{\tan \gamma_1}{\tan \gamma_2} = \frac{\mu_{r,1}}{\mu_{r,2}} \quad (3.4)$$

in cui  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sono gli angoli di incidenza, riferiti alla normale alla superficie di separazione, di una linea di  $\vec{B}$  all'interfaccia visti rispettivamente dal mezzo 1 e dal mezzo 2. Si veda, in proposito la figura 3.6. Dalla (3.4) si può constatare che all'interfaccia tra un materiale ferromagnetico ad elevata permeabilità (ad esempio ferro per il mezzo 1) e l'aria (mezzo 2), le linee di flusso dal lato dell'aria, essendo  $\tan \gamma_2$  relativamente molto più piccolo di  $\tan \gamma_1$ , e quindi  $\gamma_2 \approx 0$ , sono praticamente normali alla superficie in tutti i casi eccetto quello in cui sia  $\gamma_1 \approx 90^\circ$  (ossia linee nel mezzo 1 praticamente parallele alla superficie stessa). In questo caso,



(a) Circuito magnetico toroidale.

Figura 3.7: Circuito magnetico toroidale.

infatti, la (3.4) prevede linee ad elevati angoli di incidenza anche dal lato dell'aria.

Da queste considerazioni, si evince che se le linee di flusso corrono parallelamente alla superficie del ferro, tali linee si possono considerare praticamente confinate all'interno del ferro stesso. Infatti, se una linea fuoriuscisse, per completare il suo percorso chiuso dovrebbe rientrare successivamente nel ferro. Ma per fare ciò dovrebbe incontrare l'interfaccia in direzione normale compiendo quindi un percorso non plausibile se la superficie di interfaccia è regolare ed indefinitamente estesa. Invece è plausibile per una linea in aria entrare all'interno del ferro in direzione normale, rimanervi per un certo tratto e fuoriscirne successivamente in direzione normale per richiudere il proprio percorso.

Si può pensare allora di realizzare una rete magnetica creando dei percorsi chiusi con il ferro. Ovviamente tali percorsi non coincideranno rigorosamente con gli effettivi tubi di flusso dell'induzione magnetica, ma, per quanto detto sopra circa gli effetti delle permeabilità relative del ferro e dell'aria, ne rappresentano un'ottima approssimazione.

Il caso più semplice di circuito magnetico su cui ragionare è quello mostrato in figura 3.7. Il circuito in questione è costituito da un materiale ferromagnetico, di permeabilità  $\mu$ , di forma geometrica toroidale.

Si suppone che l'avvolgimento, composto di  $N$  spire, sia distribuito uniformemente lungo il toroide. In questa situazione, è possibile ritenere, con ottima approssimazione, che tutte le linee dell'induzione magnetica risultino confinate all'interno del toroide il quale funge quindi da circuito magnetico. In particolare, il flusso dell'induzione magnetica<sup>3</sup>, definito in generale dall'espressione

$$\phi = \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS,$$

nel caso proposto, si può scrivere semplicemente

$$\phi = B_{med} S$$

essendo l'induzione magnetica un vettore con direzione coincidente con quella della normale alla superficie  $S$  e, pertanto,  $\vec{B} \cdot \vec{n} = B$ . Con  $B_{med}$  si è indicato il valor medio di  $B$  sulla superficie  $S$ . La legge della circuitazione (2.13) applicata alla linea d'asse  $l$  nelle specifiche condizioni prese a riferimento si scrive

$$\oint_l \vec{H} \cdot \vec{t} dl = Ni, \quad (3.5)$$

interpretando il secondo membro della (2.13) come la corrente totale concatenata con una generica superficie che si appoggia alla linea  $l$ . La densità di corrente è, infatti, non nulla solo all'interno delle spire dell'avvolgimento filiforme dove vale, tra la densità di corrente,  $\vec{J}$ , e la intensità di corrente,  $i$ , la semplice relazione

$$\vec{J} \cdot \vec{n} dS = i,$$

che, integrata sulla generica superficie  $S$  appoggiata alla linea  $l$ , ove l'area interessata è complessivamente attraversata  $N$  volte dalla corrente  $i$ , fornisce proprio il secondo membro della (3.5). Non è difficile, tramite la (3.5) evincere che per ogni altra linea interna al toroide, diversa dalla linea d'asse  $l$ , il secondo membro, coinvolgendo grandezze esterne al toroide medesimo, non varia e, pertanto il campo magnetico  $\vec{H}$  ha intensità decrescente all'aumentare del raggio maggiore del toroide (ossia, a raggio maggiore della linea corrisponde intensità minore del campo e viceversa

---

<sup>3</sup>Il flusso di induzione magnetica ha una propria unità di misura nel S.I. il Weber (Wb). Talora l'induzione viene espressa in Wb/mq anzichè in Tesla (T).

in misura inversamente proporzionale). Il valore sulla linea d'asse deve risultare, pertanto, intermedio tra tutti quelli possibili. Inoltre, la direzione del campo è, per la regola della mano destra, coincidente con la tangente alla linea, pertanto

$$\oint_l \vec{H} \cdot \vec{t} dl = H_{med} l.$$

Sostituendo nella (3.5)  $H$  mediante la legge di legame materiale con  $B$ :

$$H_{med} l = \frac{B_{med} l}{\mu},$$

moltiplicando e dividendo per la superficie normale del circuito magnetico toroidale, otteniamo

$$\frac{S B_{med} l}{S \mu} = \phi \frac{l}{\mu S} = \mathfrak{R} \phi$$

ed, in definitiva

$$Ni = \mathfrak{R} \phi. \quad (3.6)$$

La relazione (3.6) prende il nome di *legge di Hopkinson*. Essa definisce la cosiddetta *riluttanza* del circuito magnetico:

$$\mathfrak{R} = \frac{l}{\mu S}. \quad (3.7)$$

Si noti la stretta rassomiglianza della (3.7) con l'espressione della resistenza elettrica relativa ad un tratto filiforme di conduttore di lunghezza  $l$  e sezione normale  $S$  di conducibilità elettrica  $\sigma$ <sup>4</sup> che si riporta qui per comodità

$$R = \frac{l}{\sigma S}.$$

L'analogia formale tra la resistenza elettrica e la resistenza magnetica (ossia la riluttanza) consente di raffrontare la legge di Hopkinson (3.6) alla ben nota legge di Ohm ponendo in evidenza le analogie tra grandezze elettriche e magnetiche come riassunto in tabella 3.3. La corrispondenza è valida nella condizione in cui la legge di Ohm è riferita ad un circuito elettrico semplice costituito da una resistenza alimentata da una f.e.m. di valore  $e$  come mostrato in figura 3.8. In tal caso, come descritto in

---

<sup>4</sup>Si ricorda che  $\sigma = \frac{1}{\rho}$  essendo  $\rho$  la resistività elettrica.

Tabella 3.3: Corrispondenza tra grandezze elettriche e magnetiche.

Legge di Ohm	Legge di Hopkinson
$e = Ri$	$Ni = \mathfrak{R}\phi$
$R$	$\mathfrak{R}$
$i$	$\phi$
$e$	$Ni$

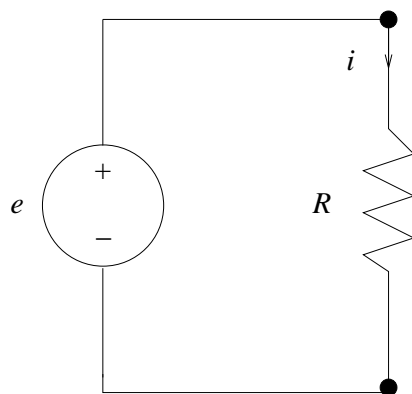


Figura 3.8: Circuito elettrico analogo a quello magnetico di figura 3.7.

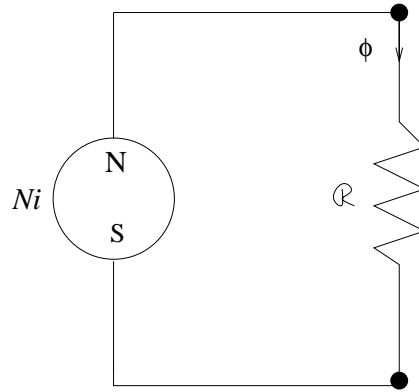


Figura 3.9: Schema circuitale del circuito magnetico di figura 3.7.

tabella, oltre alla corrispondenza tra resistenza e riluttanza, si possono far valere anche le corrispondenze f.e.m.,  $e$ , e f.m.m. (*forza magnetomotrice*),  $Ni$ , come pure corrente elettrica,  $i$ , e flusso di induzione magnetica,  $\phi$ . Si può allora schematizzare graficamente il circuito di figura 3.9 con la sua rappresentazione analoga di figura 3.7. Si ponga l'attenzione sul fatto che il verso della f.m.m. deve essere fissato di volta in volta utilizzando la regola della vite destrorsa tenendo conto del verso di entrata della corrente all'interno dell'avvolgimento e di come si avvolge il filo conduttore attorno al toroide ferromagnetico. Si può usare anche la regola della mano destra secondo la quale se l'*indice della mano destra* punta il verso positivo della corrente con il palmo che abbraccia il circuito magnetico, allora il pollice punta il verso positivo della f.m.m..

La legge di Hopkinson, derivata in un caso estremamente semplificato, viene estesa a strutture ferromagnetiche di forma geometrica più complessa che possono anche presentare regioni in cui il materiale ferromagnetico è interrotto da traferri d'aria più o meno sottili. Naturalmente questo comporterà l'assunzione di ipotesi semplificative che influiranno sull'accuratezza dell'analisi.

In figura 3.10 è rappresentato un circuito magnetico con traferro. La struttura del circuito, fatto di materiale ad elevata permeabilità, è rettangolare o quadrata come pure la sua sezione normale. Inoltre l'avvolgimento percorso da corrente non è distribuito uniformemente su tutto il circuito, ma solo su uno dei suoi lati. Ne deriva che l'andamento delle linee dell'induzione magnetica può essere solamente ipotizzato sulla base di alcune approssimazioni, in particolare:

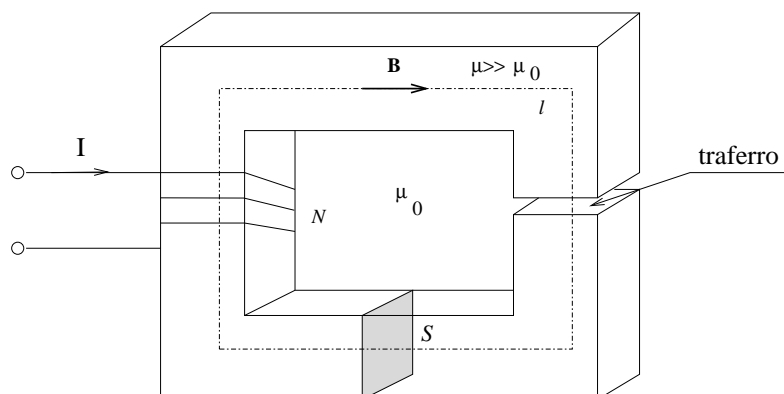


Figura 3.10: Circuito magnetico con traferro.

1. grazie all'elevata permeabilità della struttura ferromagnetica rispetto all'aria, si assume che tutte le linee di flusso di  $\vec{B}$  risultino comunque interamente confinate all'interno del ferro (tranne, ovviamente, al traferro);
2. si assume che l'induzione magnetica abbia valore costante in ogni punto della generica sezione normale, con valore pari al valor medio, e direzione secondo la tangente alla linea d'asse della struttura nel punto di intersezione con la sezione (come illustrato in figura 3.10).

Nelle due ipotesi sopracitate, ci si riconduce al caso ideale di figura 3.7 e restano validi i risultati ricavati in quelle condizioni con particolare riguardo alla legge di Hopkinson (3.6).

Occorre qui ulteriormente precisare che, a differenza della resistenza elettrica, la riluttanza non ha un valore costante in tutte le condizioni a causa del comportamento magnetico dei materiali ferromagnetici, ossia

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\mu) = \mathfrak{R}[\mu(B)] = \mathfrak{R}\left[\mu\left(\frac{\phi}{S}\right)\right]$$

il che significa che la riluttanza dipende dalla permeabilità magnetica che, a sua volta, dipende dall'intensità dell'induzione magnetica ossia, per le due assunzione poste sopra, dal flusso.

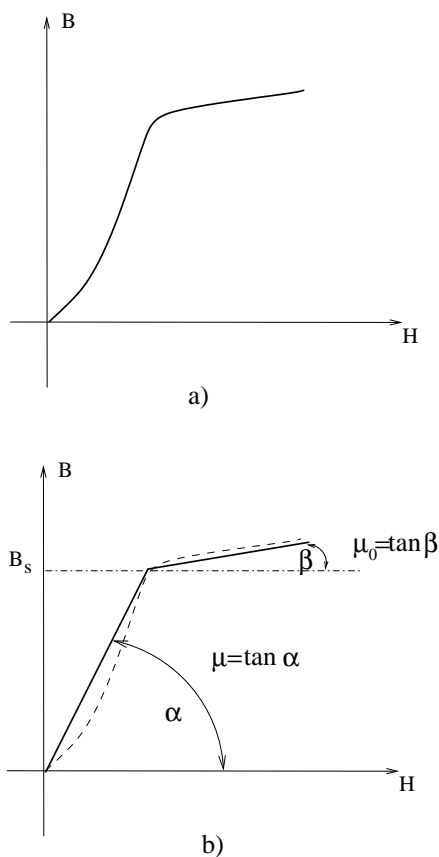


Figura 3.11: Curva di magnetizzazione normale a) e sua linearizzazione b).

### 3.3.1 Regime magnetostatico

Nel caso magnetostatico, in cui non si manifesta il fenomeno dell'isteresi, si può avanzare un'ulteriore assunzione sul valore della permeabilità, ovvero sulla relazione di legame materiale fra  $\vec{B}$  ed  $\vec{H}$ . A tale proposito si assume la *curva di magnetizzazione normale*, costruita come mostrato in figura 3.4, che può essere, come ulteriore approssimazione, opportunamente linearizzata. Si veda in proposito la figura 3.11. Se l'intensità dell'induzione magnetica si mantiene al di sotto del valore di saturazione,  $B_s$  del materiale, si può assegnare un solo valore alla permeabilità magnetica e la riluttanza assume un valore indipendente dal flusso.

Vale la pena sottolineare che, scrivendo la (3.5) per ogni percorso

chiuso di circuito magnetico formato da  $n$  tratti

$$\sum_{k=1}^n H_k l_k = NI$$

se il percorso è concatenato con una f.m.m.  $NI$ , altrimenti

$$\sum_{k=1}^n H_k l_k = 0.$$

Si osservi come queste relazioni siano le corrispondenti della legge delle tensioni nelle reti elettriche per la quale si può scrivere

$$\sum_{k=1}^n V_k = E,$$

se nella maglia è presente una f.e.m.  $E$ , oppure

$$\sum_{k=1}^n V_k = 0$$

in assenza di f.e.m. lungo la maglia. Inoltre, per la solenoidalità del vettore induzione magnetica, stabilita dalla terza delle (2.16) possiamo affermare che nei punti in cui la struttura magnetica si biforca, ossia nei nodi del circuito magnetico, per i tubi di flusso dell'induzione deve valere

$$\sum_{k=1}^r B_k S_k = 0,$$

in cui la sommatoria è estesa a tutti i tratti che afferiscono al generico nodo, ossia, ricordando la definizione di flusso

$$\sum_{k=1}^r \phi_k = 0,$$

che può essere fatta corrispondere alla legge delle correnti ai nodi di una rete elettrica

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0.$$

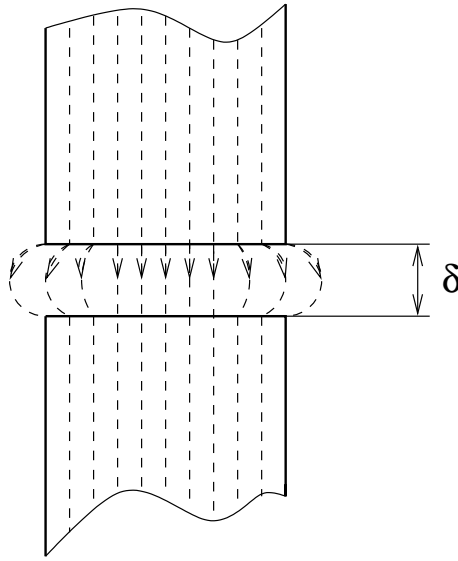


Figura 3.12: Linee di flusso dell'induzione magnetica al traferro.

I termini della somma dei flussi prendono segno positivo o negativo a seconda che si tratti di flussi uscenti o entranti rispettivamente nel nodo allo stesso modo con cui si applica la  $LC$  ai nodi delle reti elettriche. Risulta, pertanto, chiarito il fatto che ogni circuito magnetico può essere trattato con gli stessi metodi già appresi a proposito delle reti elettriche stazionarie.

Un approfondimento del discorso merita il traferro. Al traferro, la (3.6) è sempre lineare poichè la permeabilità al traferro non dipende dal flusso ma è costante di valore  $\mu_0$ . La riluttanza del traferro, tuttavia, è di qualche ordine di grandezza più elevata delle riluttanze del materiale ferromagnetico insaturo. A motivo di ciò, e per gli effetti di bordo dovuti alla limitata estensione della struttura, le linee di flusso di  $\vec{B}$  tendono a deflettere rispetto all'andamento seguito nel materiale ad elevata permeabilità come mostrato in figura 3.12. Dalla figura si può osservare un allargamento della sezione utile del circuito magnetico in corrispondenza al traferro. Si può tenere conto di questo fenomeno mediante un opportuno coefficiente  $\alpha > 1$  tale che

$$\alpha = \frac{S_a}{S_f},$$

in cui i pedici  $a$  e  $f$  stanno ad indicare l'aria ed il ferro rispettivamente. Un valore empirico di  $\alpha$  lo si può ottenere aggiungendo alla superficie

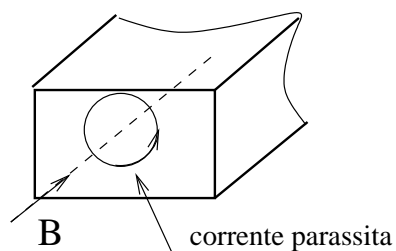


Figura 3.13: Correnti parassite nel nucleo ferromagnetico.

del ferro,  $S_f$ , una cornice di spessore pari alla metà della lunghezza  $\delta$  del traferro. Ciò equivale a sommare a ciascun lato della sezione (se rettangolare) o al raggio (se circolare) la lunghezza  $\delta$ .

### 3.3.2 Forze magnetomotrici variabili

Se le f.m.m. variano nel tempo con andamento periodico, si manifesta il fenomeno dell'isteresi che produce dissipazione di energia e, a questo, si va ad aggiungere anche un'ulteriore dissipazione di energia dovuta alle cosiddette *correnti di Foucault* (dette anche *correnti parassite*) indotte nel materiale ferromagnetico che, in quanto ferroso, è dotato di una conducibilità elettrica non nulla. In pratica, ciò che avviene nel nucleo ferromagnetico è ben rappresentato in figura

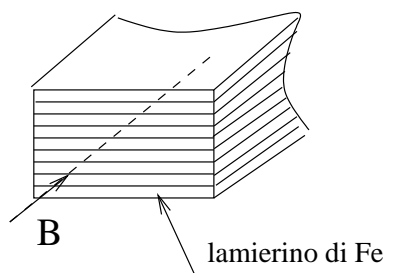


Figura 3.14: Nucleo laminato.

3.13. Nella figura il verso delle linee di corrente è relativo ad un aumento del valore dell'induzione secondo la ben nota legge di Faraday-Neumann-Lenz

$$e = -\frac{d\phi}{dt} \quad (3.8)$$

in cui il flusso  $\phi$  è quello concatenato con il percorso chiuso della corrente,  $e$  è la f.e.m. indotta nel percorso chiuso in grado di muovere la relativa corrente nel suo stesso verso per la legge di Ohm. Se il flusso diminuisce per un decremento del valore dell'induzione, la f.e.m. e la corrente indotte hanno verso opposto a quello mostrato in figura 3.13.

Per ovviare a questo inconveniente, che comporta una significativa dissipazione di energia, si ricorre alla laminazione del nucleo, il quale non viene realizzato con materiale massiccio, ma con tanti sottili lamierini sovrapposti, intervallati da sottilissimi strati di isolante tra uno e l'altro. In questo modo le proprietà magnetiche del nucleo non vengono modificate, mentre le correnti parassite possono circolare in percorsi molto ridotti, concatenare quote di flusso inferiori e, per decrementare vieppiù il fenomeno, il ferro del nucleo può venire drogato con silicio per aumentarne la resistività. In figura 3.14, è mostrato un nucleo ferromagnetico laminato. Tanto più sottile risulta lo spessore dei lamierini, e tanto maggiore è la resistività, tanto minore è la potenza dissipata dalle correnti parassite. In pratica si realizzano lamierini con spessori che possono variare tra i 0.2 e i 0.5 mm.

Vediamo come si può calcolare l'energia dissipata per correnti parassite nell'unità di volume di un nucleo laminato. Si faccia riferimento alla figura 3.15.

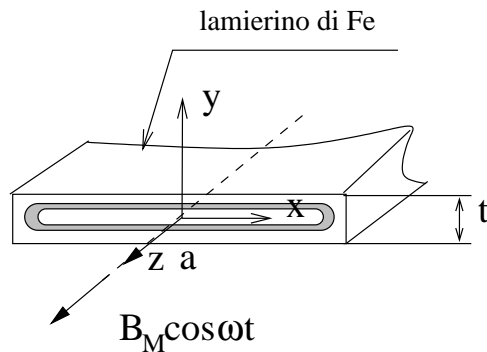


Figura 3.15: Lamierino immerso in campo di induzione variabile.

Lo spessore,  $t$ , del lamierino risulta molto più piccolo dalla sua larghezza  $a$ . Assumiamo, inoltre, per convenienza una lunghezza in direzione  $z$  pari ad una unità.

Consideriamo i percorsi delle correnti parassite contenuti nell'area in grigio avente spessore elementare  $dy$  e che interseca l'asse  $y$  in corrispondenza ai valori  $\pm y$ . La lunghezza di questi percorsi si può approssimare con il valore  $2a$ . La loro area con  $2ya$ . Il flusso intercettato da questi percorsi vale allora

$$\varphi_c = 2yaB_M \cos \omega t. \quad (3.9)$$

In corrispondenza a questo flusso, si produce una f.e.m. entro l'area in grigio pari a

$$e(y) = -\frac{d\varphi_c}{dt} = 2ya\omega B_M \sin \omega t,$$

il cui valore efficace è

$$E(y) = \frac{2ya\omega B_M}{\sqrt{2}}.$$

La resistenza del materiale compreso nell'area in grigio per unità di lunghezza vale

$$R(y) = \rho \frac{2a}{dy}$$

e la potenza dissipata nell'area in grigio per unità di lunghezza

$$P(y) = \frac{E^2}{R} = \frac{2a^2\omega^2 B_M^2 y^2}{2\rho a} dy = \frac{a\omega^2 B_M^2 y^2}{\rho} dy.$$

Per ottenere la potenza complessivamente dissipata eseguiamo l'integrazione su  $y$  nell'intervallo  $[0, t/2]$ :

$$P_{cp} = \int_0^{t/2} P(y) dy = \frac{a\omega^2 B_M^2}{\rho} \int_0^{t/2} y^2 dy = \frac{a\omega^2 B_M^2}{3\rho} \left(\frac{t}{2}\right)^3,$$

e, possiamo avere la potenza dissipata nel lamierino per unità di volume

$$p_{cp} = \frac{P_{cp}}{at} = \frac{\omega^2 B_M^2 t^2}{24\rho}.$$

Un differente approccio può essere quello che fa ricorso direttamente all'equazione

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

che, proiettata nelle coordinate cartesiane e osservando che il termine di sorgente è diverso da zero solo lungo la direzione  $z$ , fornisce l'unica equazione scalare

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} = \omega B_M \sin(\omega t).$$

Trascurando gli effetti di bordo, occorre notare che, dato il sottile spessore della lamina,  $\frac{\partial E_y}{\partial x}$  è trascurabile rispetto al termine  $\frac{\partial E_x}{\partial y}$ , per cui

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \omega B_M \sin(\omega t)$$

che è di immediata integrazione:

$$E_x(y, t) = \omega B_M \sin(\omega t) y.$$

Si ottiene quindi la densità di corrente

$$J_x(y, t) = \sigma E_x = \omega B_M \sin(\omega t) y$$

che consente di ottenere la densità di potenza dissipata per effetto Joule

$$p(y, t) = \sigma J_x^2 = \sigma [\omega B_M \sin(\omega t) y]^2.$$

Il valor medio in un periodo ed entro lo spessore del lamierino della densità di potenza dissipata per correnti parassite vale

$$p_{cp} = \frac{1}{T} \frac{1}{t} \int_{-t/2}^{t/2} \int_0^T p(y, t) dy dt = \frac{1}{T} \frac{1}{t} \int_{-t/2}^{t/2} \int_0^T \sigma [\omega B_M \sin(\omega t) y]^2 dy dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \frac{1}{t} \sigma \omega^2 B_M^2 \int_{-t/2}^{t/2} y^2 dy \int_0^T \sin^2(\omega t) dt = \frac{1}{T} \frac{1}{t} \sigma \omega^2 B_M^2 \frac{t^3}{12} \int_0^T \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} dt \\
&= \frac{1}{T} \sigma \omega^2 B_M^2 \frac{t^2}{12} \frac{T}{2} = \frac{1}{24} \sigma \omega^2 B_M^2 t^2 \quad \text{Wm}^{-3},
\end{aligned}$$

che coincide con quello calcolato con il metodo precedente.

Per comodità, le perdite per unità di volume di un materiale ferromagnetico laminato, soggetto ad induzione variabile nel tempo, comprensive sia dell'isteresi sia delle correnti parassite si riassumono nella formula

$$p = \alpha B^{1.6} f + \beta B^2 f^2,$$

in cui il primo termine è rappresentativo delle perdite per isteresi, di quelle per correnti parassite (Foucault) il secondo. L'esponente del primo termine tende a 2 con l'aumentare dell'induzione (normalmente intorno al valore di 1 T) e, quindi, le perdite hanno andamento parabolico con l'induzione e dipendono, inoltre, dal valore della frequenza  $f$ . Normalmente viene fornita una *cifra di perdita*,  $C_p$ , onnicomprensiva che fornisce la potenza dissipata per chilogrammo di materiale ferromagnetico quando sottoposto ad una induzione massima di 1 T (ossia 1 Wb/mq come talora si usa indicare l'unità di misura dell'induzione magnetica) ed una frequenza di 50 Hz.

# Capitolo 4

## Macchine elettriche

### 4.1 Introduzione

Per macchina si intende un sistema fisico in grado di eseguire una conversione di energia. Tipicamente l'energia prodotta è di tipo meccanico, ossia lavoro, a partire da energia di altra natura, ad esempio termica o elettrica. Occorre comunque richiamare l'attenzione sul fatto che la termodinamica ci insegna che la conversione di energia operata da qualsiasi macchina non ha un rendimento del 100%, ma una certa quota di energia viene dissipata dalla macchina stessa sotto forma di calore. Lo schema di flusso di una macchina è rappresentato in figura 4.1 in cui le frecce rappresentano le energie in ingresso, in uscita dalla macchina e dissipata sottoforma di calore. Una macchina che utilizzi energia elettrica per produrre lavoro meccanico o produca energia elettrica da lavoro meccanico, si dice *macchina elettrica*. Tuttavia, anche qualora entrambe le energie in entrata ed in uscita dalla macchina siano di natura elettrica, ovviamente con caratteristiche differenti l'una dall'altra, siamo di fronte ad una macchina elettrica.

Per quanto detto, se  $E_{in}$  e/o  $E_u$  in figura sono di natura elettrica, la macchina è detta macchina elettrica. Più precisamente in tabella 4.1 sono riassunti i casi che si possono presentare nella pratica. Motori e generatori sono macchine elettriche con parti in movimento, i trasformatori sono, invece, macchine statiche. Per l'importanza che rivestono le loro applicazioni, ai trasformatori merita di essere dedicato un capitolo a parte.

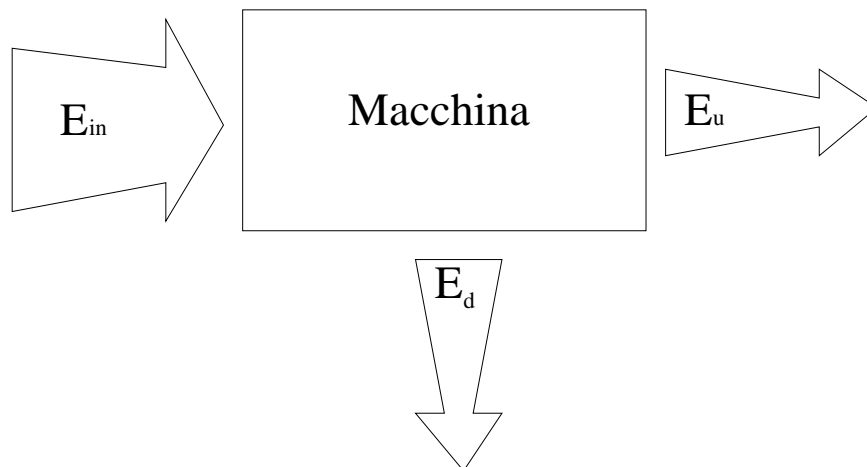


Figura 4.1: Flussi energetici attraverso una macchina.

Tabella 4.1: Tipologia delle macchine elettriche

Natura di $E_{in}$	Natura di $E_u$	Tipo di macchina elettrica
Elettrica	Elettrica	Trasformatore
Elettrica	Meccanica	Motore
Meccanica	Elettrica	Generatore

# Capitolo 5

## Il trasformatore

### 5.1 Introduzione

Il trasformatore è una macchina che trasforma energia elettrica in ingresso caratterizzata da determinate proprietà fisiche (essenzialmente correnti e tensioni) in energia elettrica con caratteristiche in uscita modificate rispetto a quelli di ingresso. Osserveremo che tale macchina può funzionare solo quando le tensioni e correnti in ingresso sono variabili nel tempo.

La trattazione sarà sviluppata a partire dal trasformatore monofase e includerà alcuni cenni essenziali ai trasformatori trifase.

### 5.2 Il trasformatore monofase

Il trasformatore monofase è costituito da due avvolgimenti di filo conduttore accoppiati tra loro mediante un circuito magnetico costituito da un nucleo ferromagnetico laminato. Un modello semplificato del trasformatore monofase è riportato in figura 5.1. Nella figura sono schematizzati il nucleo di materiale ferromagnetico e i due avvolgimenti denominati *primario* quello dal quale entra l'energia (in figura è indicato un generatore di tensione che alimenta tale avvolgimento), *secondario* quello che eroga energia verso un carico ad esso collegato. Il ruolo di primario e secondario concettualmente dipende solo dalla direzione del flusso dell'energia entro il trasformatore. Occorre sottolineare che, per lo scopo che il trasformatore deve realizzare, i due avvolgimenti hanno diverso numero di spire.

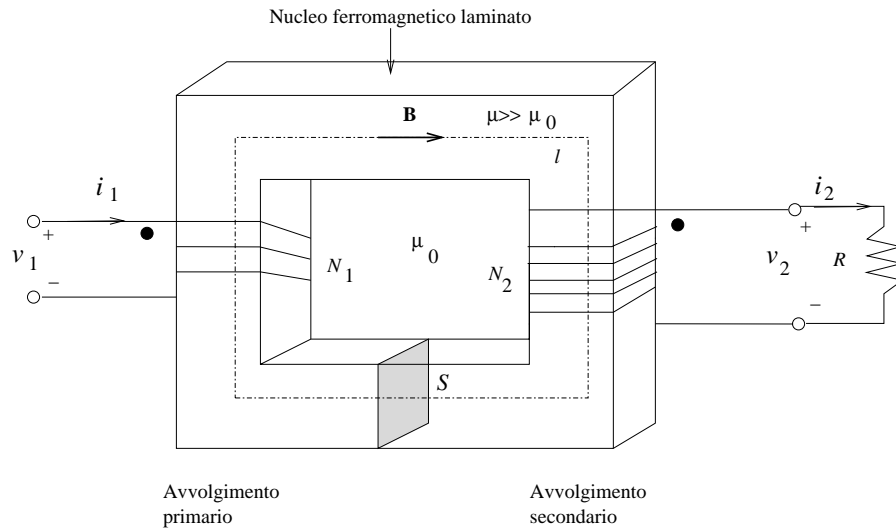


Figura 5.1: Trasformatore monofase.

Nel seguito analizzeremo il funzionamento del trasformatore partendo dal modello più semplice possibile: quello del trasformatore ideale (di cui peraltro si è già trattato per sommi capi nella prima parte di questi appunti) e rimuovendo successivamente le ipotesi semplificative otterremo dei modelli del trasformatore monofase via via più realistici.

### 5.2.1 Il trasformatore monofase ideale

Nel caso ideale tutte le perdite sono trascurate e, pertanto, si introducono alcune importanti assunzioni quali

- perfetto accoppiamento magnetico tra gli avvolgimenti, ovvero tutte le linee del flusso di induzione magnetica risultano concatenate con entrambi gli avvolgimenti;
- riluttanza del nucleo magnetico trascurabile in virtù dell'elevata permeabilità magnetica del materiale di cui esso è costituito che si suppone lontano dal livello di saturazione;
- resistenza elettrica degli avvolgimenti conduttori pure trascurabile.

Sotto queste ipotesi, la tensione ai terminali del primario è direttamente correlata con la sola legge di Faraday-Neumann-Lenz

$$v_1 = N_1 \frac{d\phi}{dt},$$

in cui il segno negativo è assorbito dalla convenzione degli utilizzatori (infatti un aumento della f.m.m., cioè della corrente positiva al primario, provoca un aumento del flusso magnetico nel nucleo e, quindi, la produzione di una f.e.m. che dovendosi opporre ad un ulteriore aumento della corrente positiva va ad agire nell'avvolgimento con una polarità che deve essere concorde a quella positiva della tensione ai terminali dell'avvolgimento primario). Al secondario, invece, se l'avvolgimento, come s'usa, è collegato ad un carico, la mutua direzione di corrente e tensione (assunte in una combinazione di versi che non rispetta la c.d.u. alla porta del secondario), e tenendo conto del segno negativo del concatenamento tra flusso di induzione magnetica e corrente secondaria, determinato dalla convenzione dei terminali marcati con il cerchietto nero, deve essere

$$v_2 = - \left( -N_2 \frac{d\phi}{dt} \right) = N_2 \frac{d\phi}{dt}$$

cioè, le tensioni degli avvolgimenti risultano avere sempre contemporaneamente i versi indicati in figura.

Si osservi che se le correnti sono stazionarie, per la (??) anche i flussi lo sono e, di conseguenza, la tensioni ai capi degli avvolgimenti (in particolare ha rilevanza quello secondario) sono entrambe nulle. Il funzionamento del trasformatore è quindi possibile solo quando le grandezze elettriche variano nel tempo. In questo caso, le equazioni della macchina si possono scrivere:

$$\begin{aligned} v_1 - N_1 \frac{d\phi}{dt} &= 0 \\ v_2 - N_2 \frac{d\phi}{dt} &= 0, \end{aligned} \tag{5.1}$$

relativamente ai due avvolgimenti, mentre per il nucleo magnetico la legge di Hopkinson, assunta nulla la riluttanza del materiale, fornisce, con i versi delle correnti indicati in figura,

$$N_1 i_1 - N_2 i_2 = 0. \tag{5.2}$$

Applicando al primario una tensione sinusoidale

$$v_1(t) = \sqrt{2}V_1 \cos \omega t,$$

dalla prima delle (5.1) si ottiene

$$\phi(t) = \frac{\sqrt{2}V_1}{N_1 2\pi f} \sin \omega t$$

che, introdotta nella seconda, fornisce

$$v_2(t) = N_2 \frac{\sqrt{2}V_1}{N_1} \cos \omega t = \frac{N_2}{N_1} v_1(t).$$

Da quest'ultima espressione si ricava la prima relazione fondamentale del trasformatore ideale

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{N_1}{N_2}, \quad (5.3)$$

che stabilisce che *il rapporto tra le tensioni ai capi degli avvolgimenti coincide con il rapporto tra i corrispondenti numeri di spire.*

Trattando del trasformatore ideale come di un doppio bipolo, se ne è data una relazione di definizione che comprende l'espressione

$$v_1 = n v_2$$

nella quale  $n$  è stata chiamata *rapporto di trasformazione*. Dalla (5.3) si vede, dunque, che il rapporto di trasformazione del trasformatore ideale monofase, coincide con il suo (cosiddetto) *rapporto spire*.

Dalla (5.2) si ricava per le correnti:

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{N_2}{N_1}, \quad (5.4)$$

che si accorda con quanto già stabilito nella prima parte degli appunti circa la seconda equazione della relazione di definizione del trasformatore ideale.

Le relazioni ricavate in questo paragrafo coinvolgono i valori istantanei delle variabili, e quindi sono ugualmente valide anche per i valori massimi e i valori efficaci delle grandezze sinusoidali e, pertanto, sono scrivibili anche in termini fasoriali:

$$\frac{\hat{V}_1}{\hat{V}_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad (5.5)$$

$$\frac{\hat{I}_1}{\hat{I}_2} = \frac{N_2}{N_1}. \quad (5.6)$$

Anche il flusso di induzione magnetica varia sinusoidalmente ed ha importanza il suo valore massimo (anzichè il valore efficace) perchè è dal valore massimo che dipende il raggiungimento o meno della saturazione del materiale ferromagnetico.

### 5.2.2 Il trasformatore monofase reale

La (5.4) prevede che, nel caso in cui il secondario sia a vuoto, la corrente primaria sia nulla. Ciò, in realtà, non si può verificare, in quanto gli inevitabili fenomeni di perdita nel circuito magnetico implicano che una sia pure modesta percentuale della corrente primaria nominale venga in ogni caso assorbita dal trasformatore dunque anche con il secondario a vuoto. Nella realtà cioè, la relazione tra le correnti del trasformatore ideale va sostituita con

$$\hat{I}_1 = \hat{I}_{10} + \frac{N_2}{N_1} \hat{I}_2 \quad (5.7)$$

scritta in termini fasoriali in quanto l'utilizzo del trasformatore avviene essenzialmente in regime sinusoidale. Nella (5.7), il termine  $\hat{I}_{10}$  rappresenta il fasore della corrente primaria a vuoto. Esso è presente in tutti i funzionamenti, ma si evidenzia quando  $\hat{I}_2 = 0$ , cioè, appunto, a vuoto.

Per ottenere delle relazioni che rispecchino più fedelmente il comportamento del trasformatore reale, occorre rimuovere le ipotesi di idealità assunte nel precedente paragrafo. Per cominciare, la riluttanza, piccola ma non nulla, del nucleo ferromagnetico determina accoppiamento imperfetto tra gli avvolgimenti ed, ancora, occorre tenere conto della caratteristica di magnetizzazione dinamica isteretica del materiale ferromagnetico e, quindi, quando il primario viene alimentato da una tensione sinusoidale, esso in generale assorbe una corrente che è sinusoidale solo in prima approssimazione. La forma del ciclo di isteresi è infatti tale che, se la proiezione dei suoi punti lungo uno degli assi varia sinusoidalmente, la proiezione degli stessi punti lungo l'altro asse ha un andamento distorto rispetto a quello sinusoidale. Si veda quanto mostrato in figura 5.2 in cui, per convenienza, si è scelto di rappresentare le grandezze dell'avvolgimento primario a parità di valor massimo per facilitare il confronto tra le relative forme d'onda.

Accoppiamento magnetico non perfetto significa anche che non tutte le linee di flusso che si concatenano con uno degli avvolgimenti (ad esempio con il primario), si concatenano anche con l'altro e viceversa. Quindi una parte delle linee di flusso dell'induzione magnetica prodotte da ciascuna corrente si richiudono in aria, concatenandosi solo con quella corrente<sup>1</sup>. A causa di ciò, i flussi concatenati con ciascun avvolgimento

---

<sup>1</sup>In queste frasi le parole avvolgimento e corrente in esso circolante sono usate con lo stesso significato.

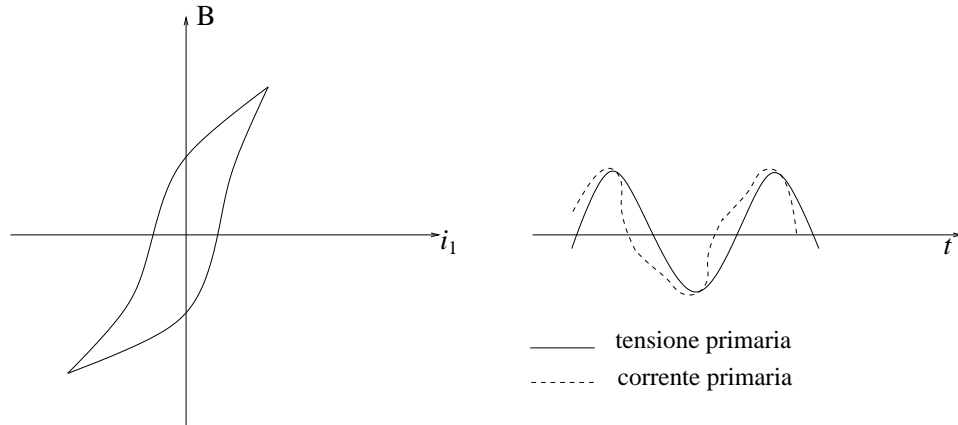


Figura 5.2: Effetto dell'isteresi sulle forme d'onda di tensione e corrente.

possono non coincidere e si può allora scrivere

$$\phi_{c1} = N_1\phi + L_{d1}i_1$$

per il flusso concatenato con il primario e

$$\phi_{c2} = N_2\phi + L_{d2}i_2$$

per quello concatenato con il secondario, dove con  $\phi$  viene indicato il *flusso comune* ai due avvolgimenti e con  $L_d$  si indica un *coefficiente di autoinduzione di dispersione* con un pedice aggiuntivo che lo riferisce all'avvolgimento corrispondente. Le equazioni di macchina si possono allora scrivere

$$v_1 - N_1 \frac{d\phi}{dt} - L_{d1} \frac{di_1}{dt} - R_1 i_1 = 0, \quad (5.8)$$

$$v_2 - N_2 \frac{d\phi}{dt} + L_{d2} \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 = 0 \quad (5.9)$$

per i due avvolgimenti, dove  $R_1$  ed  $R_2$  rappresentano le resistenze dell'avvolgimento primario e del secondario rispettivamente, e

$$N_1 i_1 - N_2 i_2 = \Re\phi \quad (5.10)$$

è l'equazione per il nucleo ferromagnetico.

In regime sinusoidale, le precedenti si scrivono in termini fasoriali

$$\hat{V}_1 = (R_1 + jX_{d1}) \hat{I}_1 + jN_1 \frac{\omega}{\sqrt{2}} \phi, \quad (5.11)$$

$$\hat{V}_2 + (R_2 + jX_{d2}) \hat{I}_2 = jN_2 \frac{\omega}{\sqrt{2}} \phi, \quad (5.12)$$

$$N_1 \hat{I}_1 - N_2 \hat{I}_2 = \frac{\Re}{\sqrt{2}} \phi. \quad (5.13)$$

### 5.2.2.1 Funzionamento a vuoto

Per analizzare il comportamento del trasformatore reale, consideriamo dapprima alcuni funzionamenti particolarmente semplici. Il funzionamento più semplice da esaminare è quello *a vuoto* per il quale, cioè,  $\hat{I}_2 = 0$ . In questo caso, la corrente primaria si riduce a qualche percento del suo valore nominale per cui le cadute da essa provocate nell'avvolgimento primario, già solitamente piccole nel funzionamento nominale, divengono del tutto trascurabili, ossia

$$\hat{V}_1 = (R_1 + jX_{d1}) \hat{I}_{10} + jN_1 \frac{\omega}{\sqrt{2}} \phi \cong jN_1 \frac{\omega}{\sqrt{2}} \phi \quad (5.14)$$

ed essendo

$$\hat{V}_{20} = jN_2 \frac{\omega}{\sqrt{2}} \phi$$

si ottiene che il rapporto delle tensioni a vuoto con ottima approssimazione coincide con la (5.5).

Le perdite nel ferro, dovute ad isteresi e a correnti parassite nei lamierini, sussistono anche a vuoto dal momento che il flusso principale dipende dalla tensione primaria che può assumere il suo valore nominale.

La potenza complessa assorbita a vuoto dal primario alimentato dalla tensione nominale vale:

$$\begin{aligned} \hat{V}_1 \hat{I}_{10}^* &= (R_1 + jX_{d1}) \hat{I}_{10} \hat{I}_{10}^* + jN_1 \frac{\omega}{\sqrt{2}} \phi \hat{I}_{10}^* = \\ &= R_1 I_{10}^2 + jX_{d1} I_{10}^2 + jN_1 \frac{\omega}{\sqrt{2}} \phi \hat{I}_{10}^* \end{aligned}$$

da cui si può trarre che il termine  $R_1 I_{10}^2$  rappresenta la potenza dissipata per effetto joule sul primario. Essa è trascurabile in accordo al fatto che la corrente primaria a vuoto è molto piccola. Altrettanto dicasi per il termine reattivo  $X_{d1} I_{10}^2$ . Per quanto riguarda l'ultimo termine, si può dire che se  $\hat{I}_{10}$  ha una componente in fase con il flusso esso rappresenta, per tale componente, una potenza reattiva (si osservi che il termine è preceduto dall'unità immaginaria) e può essere interpretata

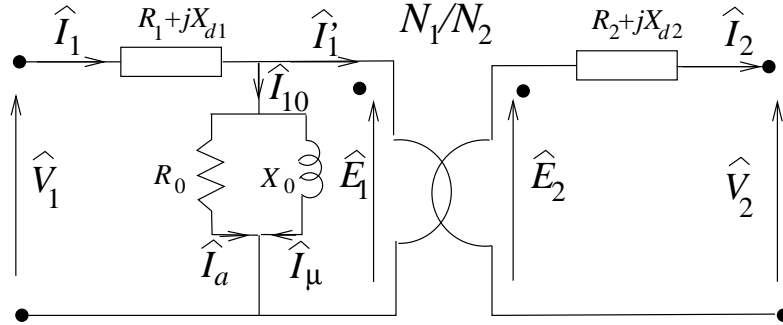


Figura 5.3: Circuito equivalente del trasformatore reale.

come una *corrente magnetizzante*  $\hat{I}_\mu$  ossia come quella corrente che serve per stabilire il flusso (f.m.m.), mentre per rendere conto delle perdite nel ferro, occorre supporre una componente in quadratura con il flusso, che chiamiamo *corrente attiva*,  $\hat{I}_a$ , il cui fasore coniugato moltiplicato per l'unità immaginaria possa fornire un valore reale pari a  $\omega N_1 \phi I_a$ , ossia una potenza attiva assorbita dall'avvolgimento e dissipata nel nucleo.

In base a queste considerazioni, si può adottare una utile rappresentazione circuitale del trasformatore quale quella mostrata in figura 5.3. Con l'ausilio del circuito equivalente risulta immediato scrivere

$$\hat{I}_{10} = \hat{I}_a + \hat{I}_\mu$$

che, introdotta nell'equazione per il nucleo ferromagnetico e con il secondario a vuoto, porge

$$N_1 \hat{I}_{10} = N_1 \hat{I}_\mu + N_1 \hat{I}_a = \frac{\Re}{\sqrt{2}} \phi + jK' \phi. \quad (5.15)$$

Nell'espressione che precede si sono distinte: la f.m.m. che produce il flusso, secondo la legge di Hopkinson,

$$N_1 \hat{I}_\mu = \frac{\Re}{\sqrt{2}} \phi$$

e la corrente assorbita per le perdite nel nucleo

$$N_1 \hat{I}_a = jK' \phi,$$

dalla quale si può porre

$$I_a = \frac{K' \phi}{N_1}.$$

Ricordando che la potenza assorbita per le perdite nel ferro vale

$$P_{Fe} = \omega N_1 \phi I_a$$

sostituendo l'espressione della corrente attiva ricavata sopra

$$P_{Fe} = \omega K' \phi^2 = K \omega^2 \phi^2$$

dove si è fatta la posizione  $K = K'/\omega$ . In pratica, la corrente attiva è assai più piccola della corrente magnetizzante. La (5.15) si può anche scrivere in forma più compatta

$$N_1 \hat{I}_{10} = \hat{\mathfrak{R}} \phi \quad (5.16)$$

nella quale si è fatta la posizione  $\hat{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R} + jK'$ .

Nel caso del funzionamento a vuoto, la corrente secondaria è nulla e il diagramma del funzionamento si riduce all'esempio rappresentato in figura 5.4.

### 5.2.2.2 Funzionamento in corto-circuito

Il funzionamento in corto-circuito non è fra quelli di esercizio del trasformatore ma riveste un notevole interesse teorico per la determinazione del rendimento della macchina.

Se il primario viene alimentato con la sua tensione nominale, un corto-circuito al secondario richiama intensità di corrente secondaria e, attraverso la (5.6), primaria pericolose per la macchina. Per evitare ciò il primario va alimentato con una tensione opportunamente ridotta rispetto al valore nominale. Il funzionamento in corto-circuito è definito come quello in cui la tensione primaria viene scelta in modo da fare circolare entro gli avvolgimenti del trasformatore le correnti nominali. Il valore di tensione che realizza questo funzionamento è allora detto *tensione di corto-circuito* ed indicato con la notazione  $V_{1cc}$ . In queste condizioni le perdite nel ferro, in quanto proporzionali al flusso e, quindi, alla tensione primaria secondo la (5.14), risultano molto piccole, mentre le perdite nel rame, calcolabili con la relazione

$$P_{Cu} = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 = R_1 I_1^2 + R_2 \frac{N_1^2}{N_2^2} I_1^2 = R_{1cc} I_1^2$$

dove si è posto

$$R_{1cc} = R_1 + R_2 \frac{N_1^2}{N_2^2},$$

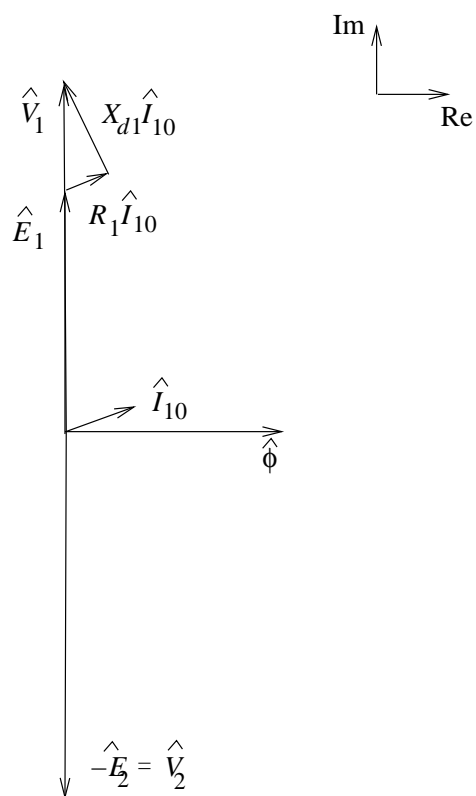


Figura 5.4: Diagramma fasoriale del trasformatore a vuoto.

corrispondono alle perdite che caratterizzano il funzionamento nominale in quanto le correnti sono quelle nominali. La tensione di corto-circuito risulta, di norma, a seconda della potenza del trasformatore, da qualche per cento della tensione nominale per le macchine di potenza più elevata, sino a poco più del 10% nelle macchine di minore potenza.

### 5.2.2.3 Circuiti equivalenti approssimati

Il circuito equivalente del trasformatore mostrato in figura 5.3 è per taluni funzionamenti inutilmente complesso per il grado di accuratezza richiesto. Si suole, pertanto, far ricorso a circuiti equivalenti via via più semplici a seconda del grado di accuratezza richiesto nei diversi casi pratici.

Innanzitutto occorre rilevare che le impedenze  $X_0$  ed  $R_0$ , dette impedenze trasversali, sono molto più elevate (di alcuni ordini di grandezza) delle impedenze cosiddette longitudinali quali le resistenze e le reattanze di dispersione degli avvolgimenti. Infatti, mentre queste ultime sono solitamente molto piccole, per quelle citate per prime si ha:

$$jX_0 = \frac{\hat{E}_1}{\hat{I}_\mu} = \frac{j\omega N_1 \phi / \sqrt{2}}{\frac{\Re \phi}{N_1}},$$

da cui si ottiene

$$X_0 = \frac{\omega N_1^2}{\sqrt{2}\Re}.$$

Essendo la riluttanza del nucleo magnetico sempre molto piccola<sup>2</sup>, ne deriva che la reattanza magnetizzante è molto elevata. Analogamente per la resistenza a vuoto, che tiene in conto le perdite nel ferro,  $P_{Fe}$ , si ha

$$R_0 = \frac{P_{Fe}}{I_a^2} = \frac{P_{Fe}}{\frac{E_1^2}{R_0^2}},$$

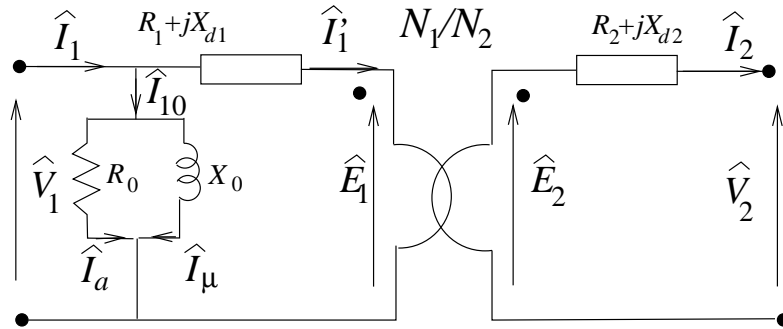
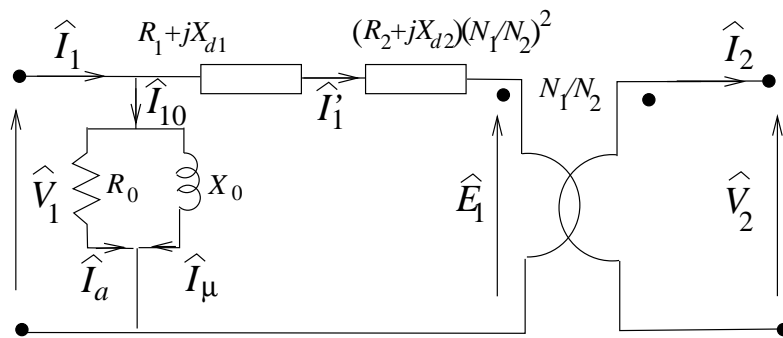
dalla quale si ricava facilmente

$$R_0 = \frac{E_1^2}{P_{Fe}} \cong \frac{V_1^2}{P_{Fe}}$$

che, essendo anche le perdite nel ferro molto piccole, rendono la resistenza a vuoto relativamente assai elevata. Il parallelo delle due impedenze

---

<sup>2</sup>Si richiama il fatto che nel caso ideale è supposta nulla.

Figura 5.5: Rete equivalente a  $\Gamma$ .Figura 5.6: Rete a  $\Gamma$  con impedenze del secondario riportate al primario.

trasverse resta comunque elevato e, pertanto, non si commette un errore molto elevato anticipando tali impedenze nella rete equivalente come mostrato in figura 5.5. Tale rete equivalente prende il nome di rete a gamma, dal collegamento tra impedenze trasversali e longitudinali che ricorda una lettera gamma maiuscola,  $\Gamma$ . Il vantaggio di questa rete è che riportando al primario le impedenze dell'avvolgimento secondario (ricordando che in questa operazione occorre moltiplicare per il quadrato del rapporto spire) come in figura 5.6, è possibile sommare tra loro le impedenze longitudinali, che risultano in serie tra di loro, permettendo una notevole semplificazione.

Particolarmente adatta al funzionamento di corto-circuito, ma spesso utilizzata anche nel campo nominale di funzionamento, è la rete equivalente di Kapp, caratterizzata dal considerare trascurabile l'impedenza trasversale rispetto alla longitudinale. Questa rete è rappresentata in figura 5.7. Da questa rete si può ricavare il diagramma polare di corto-circuito del trasformatore. Esso si può tracciare come in figura

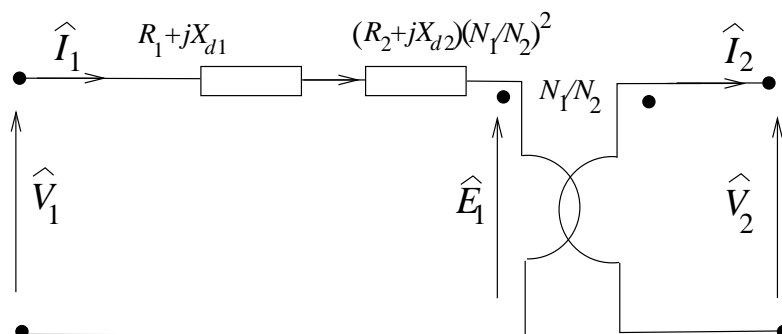


Figura 5.7: Rete equivalente di Kapp del trasformatore.

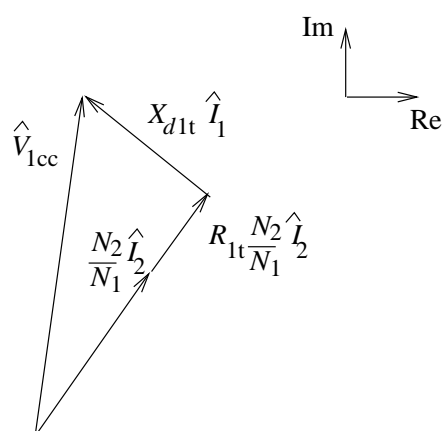


Figura 5.8: Diagramma di corto-circuito del trasformatore.

5.8.

### 5.3 Rendimento del trasformatore

Il trasformatore è una macchina solitamente deputata ad alimentare carichi variabili nel tempo e, pertanto, con rendimento pure variabile nel tempo al variare del carico e del suo fattore di potenza. Si conviene pertanto definire un rendimento convenzionale del trasformatore definito dalla formula

$$\eta = \frac{P_2}{P_2 + P_{Fe} + P_{Cu}}, \quad (5.17)$$

in cui  $P_2$  rappresenta la potenza erogata a secondario e gli altri termini sono legati alle perdite nel Ferro e nel Rame rispettivamente. I termini

della (5.17) secondo normativa vanno misurati a  $75\text{ }^{\circ}\text{C}$  di temperatura della macchina.

Le perdite nel ferro vengono misurate mediante una prova a vuoto nella quale viene stabilita la tensione nominale al primario. In queste condizioni, infatti, le correnti negli avvolgimenti sono trascurabili mentre il flusso dell'induzione magnetica, dipendendo dalla tensione primaria, assume il suo valore nominale e con questo anche le perdite per isteresi e correnti di Foucault da esso indotte sono quelle nominali. La lettura di un wattmetro collegato ai terminali del primario con secondario a vuoto, fornisce un valore di potenza attiva che è quella dissipata nel Ferro nel funzionamento nominale.

Le perdite nel rame si misurano mediante una prova in corto-circuito del trasformatore. Allora le correnti circolanti negli avvolgimenti sono quelle nominali mentre la tensione primaria è qualche per cento del suo valore nominale. La lettura del wattmetro collegato immediatamente a monte del primario indica allora la potenza attiva dissipata per effetto Joule negli avvolgimenti del trasformatore.

Si può calcolare che il rendimento del trasformatore risulta massimo quando i due termini di perdita nella (5.17) sono uguali. Poiché le perdite nel rame dipendono dal quadrato delle correnti e, quindi, aumentano all'aumentare del fattore di carico della macchina, mentre le perdite nel ferro non variano significativamente con il carico, è possibile fare funzionare il trasformatore con un livello di carico che soddisfi la condizione di massimo rendimento. Normalmente il rendimento massimo del trasformatore si realizza non al valore di pieno carico, ma ad un valore inferiore (compreso tra due terzi e tre quarti del carico massimo nominale) come mostrato in figura 5.9 dove sono state rappresentate le curve di carico (in percentuale della corrente nominale) per carichi con fattore di potenza unitario e pari a 0,9.

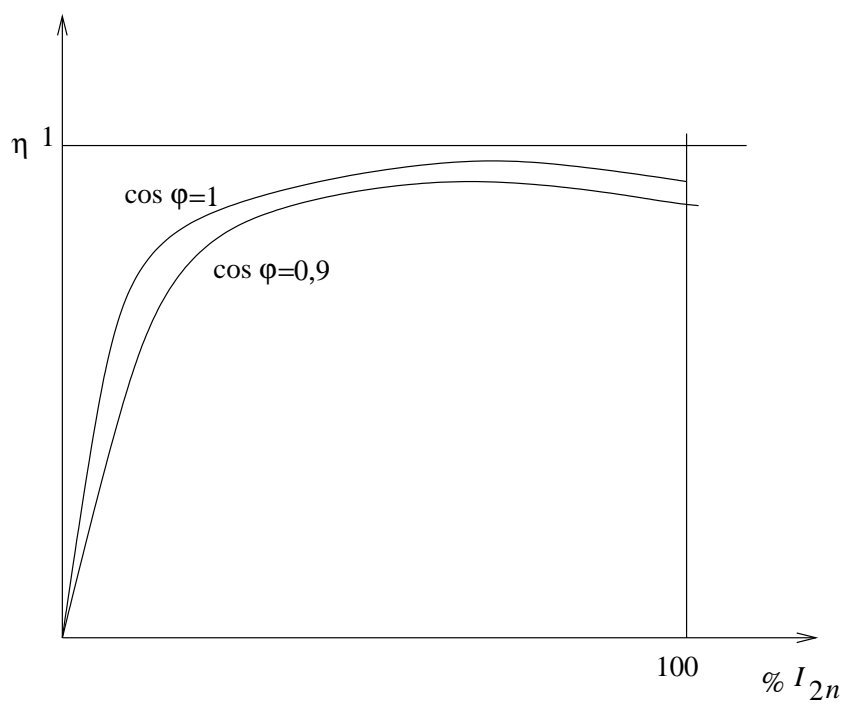


Figura 5.9: Rendimento del trasformatore



# Capitolo 6

## Macchine a corrente continua

### 6.1 Introduzione

Per comprendere il principio di funzionamento delle macchine a corrente continua (ma non solo) è utile premettere una semplice macchina lineare idealizzata. Si vedrà in seguito che il funzionamento delle macchine elettriche rotanti a corrente continua ed alternata, potrà essere più facilmente illustrato a partire dal semplice caso ideale illustrato in figura 6.1.

Una sbarra conduttrice può scorrere senza attrito su due rotaie, pure conduttrici, che al tempo  $t = 0$  vengono collegate ad una batteria avente tensione  $V$  attraverso un circuito di resistenza  $R$ . Una corrente può iniziare a percorrere il circuito di alimentazione le rotaie e la barra che formano un percorso chiuso la cui unica resistenza ipotizzata è la sola  $R$ . Nella barra libera di muoversi va ad agire una forza di Lorentz legata al numero e alla velocità delle cariche elettriche circolanti nella barra stessa e al campo di induzione magnetica esterno diretto perpendicolarmente al piano della figura. Tale forza agisce nella direzione mutuamente perpendicolare a quella della corrente sulla barra e al campo di induzione magnetica con un modulo che si ricava dalla relazione

$$F = nqvSlB = IlB \quad (6.1)$$

dove si sono indicate con  $n$  la densità volumetrica dei portatori della carica  $q$ ,  $v$  è la velocità delle cariche entro la barra,  $S$  la sezione della barra ed  $l$  la distanza tra le rotaie.  $B$  è il valore supposto costante dell'induzione magnetica. Poichè la corrente  $I$  è data da

$$I = nqvS,$$

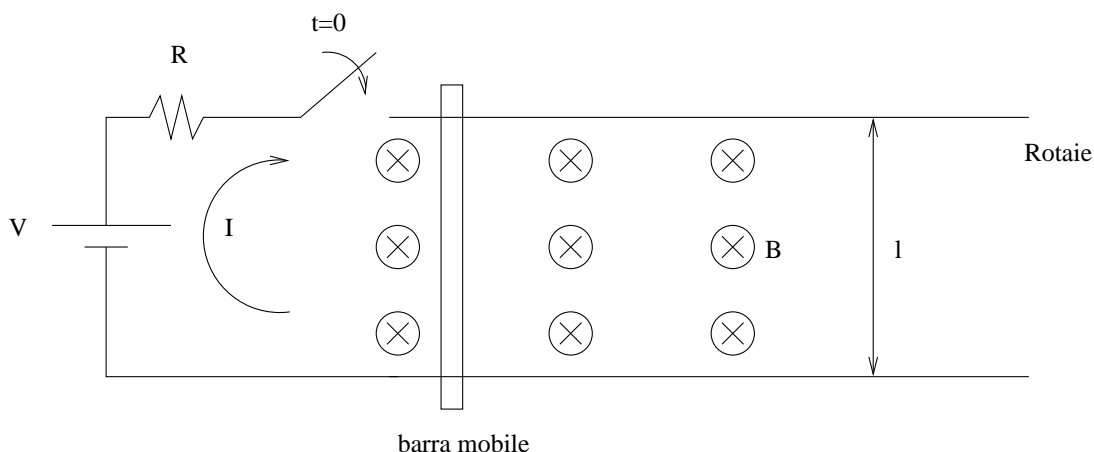


Figura 6.1: Barra metallica su rotaie conduttrici in campo di induzione magnetica uniforme.

la (6.1) si può scrivere

$$F = IlB. \quad (6.2)$$

La barra, sotto l'effetto della forza (6.2) che agisce da sinistra a destra nella figura 6.1, acquista velocità e taglia le linee del campo di induzione magnetica provocando un aumento del flusso concatenato con la corrente  $I$ . La variazione di flusso determina una f.e.m. secondo la legge di induzione elettrica con polarità positiva sulla parte della barra che tocca la rotaia positiva. In questo modo, la f.e.m. contrasta la corrente che è data dalla relazione

$$I = \frac{V - e}{R},$$

dove la f.e.m.  $e$  si calcola considerando che, nell'intorno  $dt$  dell'istante in cui la velocità della barra vale  $u$ , la variazione  $d\phi$  del flusso concatenato con la corrente, dovuto all'aumento dell'area racchiusa dalla corrente  $ludt$  vale

$$e = \frac{d\phi}{dt} = \frac{Bludt}{dt} = Blu. \quad (6.3)$$

La velocità della sbarra, e la sua energia cinetica, possono continuare a crescere manifestandosi come aumento dell'energia assorbita dalla f.e.m. indotta, sino all'istante in cui  $e = V$  in cui si annulla la corrente e la forza agente sulla sbarra. Questa si muoverà allora di moto traslatorio uniforme da quell'istante in poi.

**Funzionamento da motore** Se viene collegato alla sbarra in moto uniforme un carico che si manifesta come una forza agente in verso opposto a quello della velocità, la sbarra rallenterà il suo moto e, tale rallentamento implicando la riduzione della f.e.m  $e$ , la corrente potrà ricominciare a scorrere in direzione oraria producendo una forza di Lorentz nel verso del moto. Tale forza aumenterà durante il frenamento sino ad equilibrare la forza opposta dovuta al carico. Nuovamente la velocità raggiunge un valore costante quando la forza risultante è nulla. In questa situazione la potenza elettrica fornita dalla batteria è convertita in parte in potenza meccanica ed in parte in potenza termica sulla resistenza  $R$ . La potenza elettrica convertita in potenza meccanica è quella assorbita dalla f.e.m.:

$$p = eI = Fu.$$

**Funzionamento da generatore** A partire dalla situazione in cui la sbarra trasla con velocità costante sulle rotaie, possiamo applicare una forza dall'esterno agente nel verso della velocità. Ciò provoca un incremento della f.e.m. indotta a valori superiori alla tensione di alimentazione  $V$ . La corrente allora inizia a circolare in direzione antioraria provocando una forza di Lorentz di verso opposto al moto che tende a frenare la sbarra. La velocità della sbarra tenderà a stabilizzarsi quando la risultante delle due forze sarà nulla. In questo caso si osserva che la potenza meccanica provoca una produzione di potenza elettrica  $p = eI$  che in parte viene dissipata per effetto Joule sulla resistenza ed in parte viene assorbita dalla batteria che la immagazzina come energia chimica.

Si osserva che la (6.2) fornisce un valore della forza che per valori unitari delle variabili ( $B = 1$  T,  $l = 1$  m e  $I = 1$  A) produce la forza di 1 N che è un valore molto modesto. Per incrementare tale valore occorre aumentare  $l$  predisponendo numerose barre in parallelo fino a sviluppare una forza complessiva di modulo desiderato.

## 6.2 Macchine rotanti a corrente continua

Il principio di funzionamento descritto nel paragrafo precedente si può applicare alle macchine rotanti a corrente continua. Tali macchine sono costituite da una parte statica detta *statore* e costituita da un cilindro cavo di materiale ferromagnetico alla periferia della cui cavità sono realizzati dei poli magnetici alternati. All'interno della cavità dello statore sta

il *rotore* cilindrico di ferro laminato montato su di un albero poggiante su cuscinetti per poter ruotare su se stesso. Sulla superficie del rotore vengono praticate delle cavità lungo le generatrici entro cui vengono alloggiati i conduttori cosiddetti di *armatura*. Si osservi in proposito la figura 16.9. In figura 16.10 è mostrata la sezione trasversale di una macchina a due poli in cui sono evidenziate le linee del flusso di induzione magnetica al traferro. Le linee in aria tendono a seguire il percorso di minima riluttanza ossia di minima lunghezza. Esse sono dunque perpendicolari alle superfici di interfaccia sia dello statore che del rotore. Di norma si cerca di ottenere una distribuzione di flusso quasi uniforme in modulo su tutta la superficie di ciascun polo. Nella regione di passaggio da un polo all'altro, il flusso dell'induzione magnetica è molto piccolo e generalmente viene trascurato in prima approssimazione.

Nel funzionamento da motore, generatori esterni vengono utilizzati per produrre le correnti di eccitazione e di armatura. Con la disposizione delle correnti mostrata in figura 16.10, si genera una coppia in senso antiorario come si può verificare con la regola del cavatappi.

### 6.2.1 Forza elettromotrice indotta

Con la rotazione i conduttori di armatura si muovono entro il campo di induzione magnetica prodotto dallo statore con velocità e campo di induzione che risultano mutuamente perpendicolari in corrispondenza ai poli statorici. Ciò produce un f.e.m. di valore pressochè costante in ciascun conduttore rotorico. A differenza della macchina lineare ideale sulla quale si è ragionato nel primo paragrafo di questo capitolo, passando da un polo all'altro, i conduttori sperimentano un campo di induzione di verso opposto al precedente. Questo comporta che la tensione indotta dalla rotazione si annulli e successivamente si ripristini con opposta polarità. Affinchè ai terminali esterni del circuito d'armatura si veda una tensione di valore costante, viene predisposto un sistema di commutazione meccanico, detto sistema collettore-spazzole, che inverte il collegamento dei conduttori nel passare da un polo al successivo.

Per illustrare questo sistema consideriamo una semplice macchina a due poli con una sola spira di armatura come in figura 6.3. Le estremità della spira sono collegate ad un collettore a due sole lamelle calettato sull'albero motore. I due segmenti del collettore sono isolati tra loro e dall'albero motore. Le spazzole collegate allo statore sono a contatto elettricamente con le lamelle del collettore. Durante la rotazione la

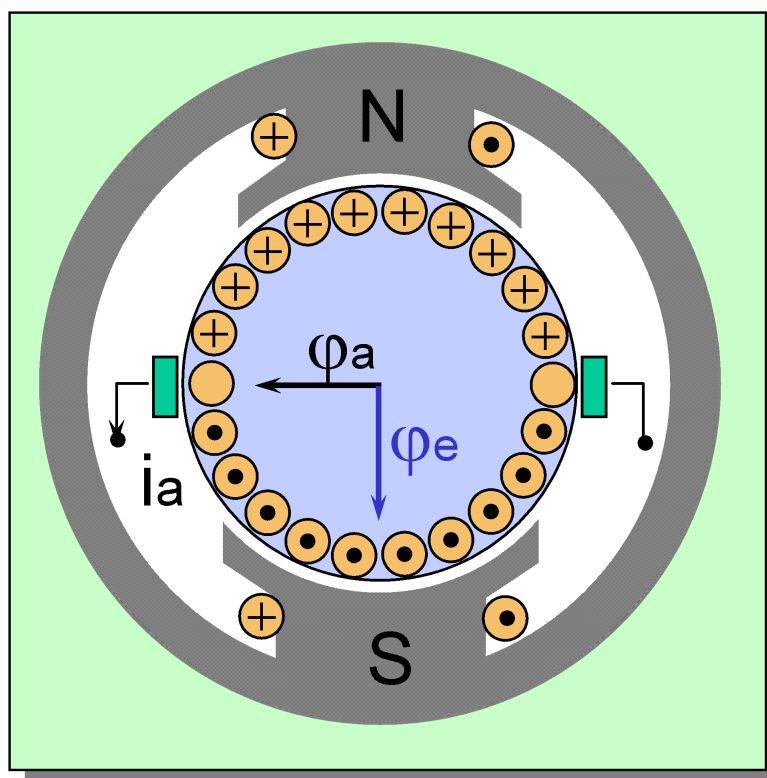


Figura 6.2: Sezione normale di una macchina a due poli. Sono evidenziati i flussi di armatura e di eccitazione.

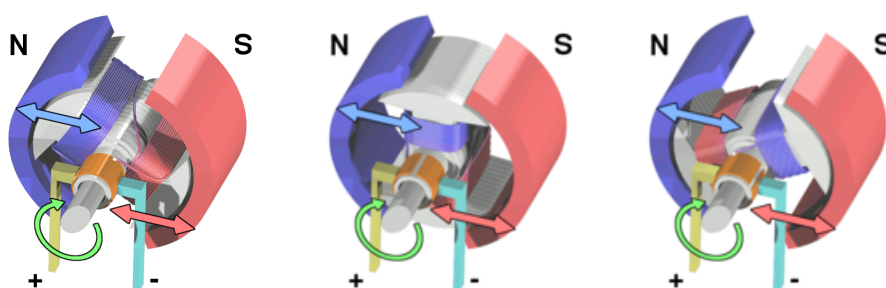


Figura 6.3: Commutazione di un singolo avvolgimento di armatura.

spazzola positiva può trovarsi collegata all'avvolgimento azzurro sotto il polo nord (pure in azzurro) mentre quella negativa con la parte rossa dell'avvolgimento sotto il polo sud (pure rosso). Ciò comporta una certa distribuzione delle tensioni nelle due parti dell'avvolgimento. Durante la rotazione quando i conduttori si trovano tra due poli, la tensione indotta negli avvolgimenti è nulla e si inverte quando gli avvolgimenti passano sotto il polo del colore opposto al proprio. Di fatto la tensione indotta entro l'avvolgimento è alternata e tale si manifesterebbe all'esterno del rotore se non ci fosse il sistema spazzole-collettore che provvede ad invertire la polarità della tensione di armatura quando essa cambia segno. Nelle macchine tipicamente il collettore presenta diverse decine di segmenti e solo una parte limitata degli avvolgimenti viene commutata nel passaggio delle spazzole tra un segmento e l'altro del collettore.

L'armatura consiste normalmente di un gran numero di conduttori disposti attorno alla periferia del rotore. Più conduttori sono collegati in serie formando avvolgimenti in grado di raggiungere elevate tensioni complessive. Inoltre sono presenti anche molti percorsi in parallelo per le correnti che attraversano l'armatura. I conduttori d'armatura ed il loro cfollegamento al collettore si realizza in modo da fare percorrere alle correnti versi opposti in corrispondenza di poli opposti così da assicurare la costanza della coppia motrice. I dettagli dell'architettura degli avvolgimenti di rotore va oltre lo scopo di questi appunti. Ciò che interessa qui è la caratterizzazione esterna del motore a corrente continua, ossia ciò che si può ottenere ai terminali delle spazzole. Queste ultime sono realizzate in grafite atta a lubrificare il contatto con le lamelle del collettore, tuttavia esse sono anche da considerarsi il punto debole di questa macchina in quanto si consumano e vanno sostituite a causa dell'usura meccanica cui vanno incontro che le porta a rapido deterioramento.

## 6.2.2 Circuiti equivalenti

### 6.2.2.1 Motore ad eccitazione indipendente

Un circuito equivalente semplificato (privo di perdite) del motore a corrente continua ad eccitazione indipendente è mostrato in figura 6.4. Il circuito di eccitazione è percorso dalla corrente  $i$ , mentre la f.e.m. di armatura  $E$ , che rappresenta il valore medio di tensione indotta nell'armatura quando i conduttori si muovono rispetto al campo flusso di

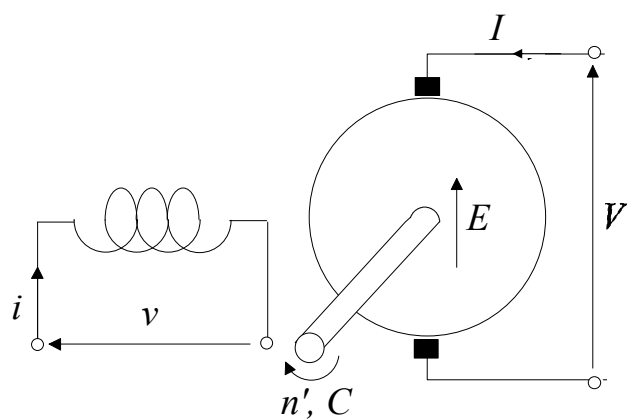


Figura 6.4: Schema di motore a corrente continua con eccitazione indipendente

induzione magnetica, vale

$$E = K\phi n' \quad (6.4)$$

e, per il verso che assume è detta forza *controlettromotrice*. Nella formula  $n'$  è il numero di giri al minuto primo che è legato alla velocità angolare meccanica  $\omega_m$  dalla seguente relazione

$$n' = 60f = 60\frac{\omega_m}{2\pi} = 30\frac{\omega_m}{\pi},$$

$K$  è una costante che dipende dalla macchina, ossia dai parametri di progetto della macchina, e  $\phi$  è il flusso di induzione magnetica prodotto dai poli statorici.

La coppia meccanica sviluppata dal motore è data da una relazione del tipo

$$C_m = K\phi I \quad (6.5)$$

in cui  $I$  è la corrente d'armatura. La coppia data dalla (6.5) non è quella effettivamente utile poichè occorre decurtarla delle perdite dovute agli attriti meccanici e delle altre perdite dovute alla rotazione (isteresi e correnti parassite).

Al lordo delle perdite dovute al moto, la potenza meccanica sviluppata vale

$$P_m = C_m\omega_m = EI.$$

Ossia la potenza meccanica equivale a quella elettrica assorbita dall'armatura.

Nelle macchine di taglia più piccola il flusso di induzione rotorico può essere realizzato mediante magneti permanenti.

### 6.2.2.2 Motore autoeccitato in parallelo

In questo tipo di motore, il circuito di eccitazione e quello d'armatura sono alimentati dalla stessa tensione comune come mostrato in figura 6.5. Il circuito di eccitazione è dotato di un reostato (resistenza variabile)  $R_e$  in serie agli avvolgimenti statorici. Anche il circuito di armatura può essere dotato di reostato (in figura  $R_a$ ). Il motore è alimentato dalla tensione  $V$  e la f.c.e.m. vale  $E$ . La potenza assorbita complessivamente dal motore vale

$$P_{in} = V(i + I) \quad (6.6)$$

di questa una parte viene impiegata per generare il campo con una perdita di potenza

$$P_{de} = Vi.$$

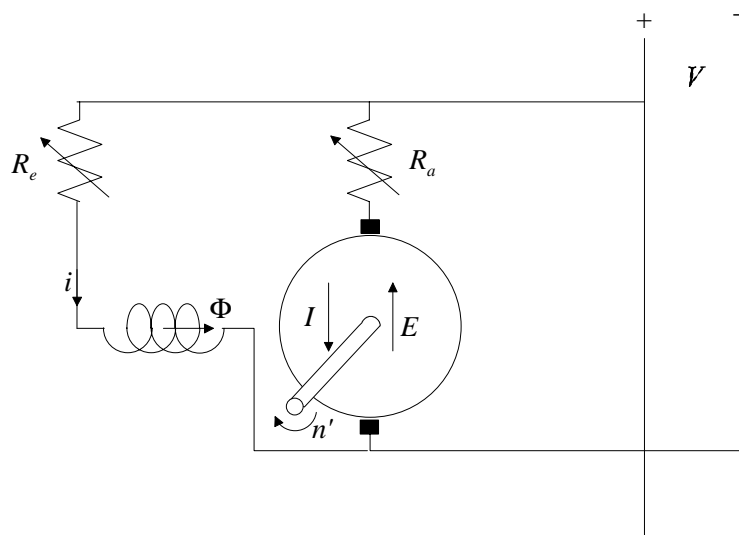


Figura 6.5: Motore autoeccitato in parallelo

Inoltre si hanno perdite di potenza nel circuito d'armatura

$$P_{da} = R_a I^2$$

che sommate alle precedenti costituiscono le cosiddette *perdite nel rame*. La potenza elettrica convertita in meccanica assume il valore già visto

$$P_m = EI = C_m \omega_m,$$

con il noto significato dei simboli. La potenza utile si ottiene sottraendo alla potenza meccanica sviluppata le perdite per attrito, ventilazione, isteresi e correnti parassite. Queste perdite sono approssimativamente proporzionali alla velocità di rotazione.

**Caratteristica meccanica** La caratteristica meccanica esprime la coppia meccanica in funzione della velocità angolare meccanica o del numero di giri del rotore.

Dalla figura 6.5 si ricava facilmente

$$V = R_a I + E \quad (6.7)$$

applicando la  $LT$  al circuito d'armatura. Dalla (6.5) si può ottenere

$$I = \frac{C_m}{K\phi}$$

che sostituita assieme alla (6.4) nella (6.7) fornisce

$$V = \frac{R_a C_m}{K\phi} + K\phi n',$$

che esplicitando la coppia fornisce la caratteristica meccanica desiderata

$$C_m = \frac{K\phi}{R_a}(V - K\phi n'). \quad (6.8)$$

Si fa osservare che la caratteristica è una retta con pendenza negativa che interseca gli assi in corrispondenza della velocità a vuoto

$$n'_0 = \frac{V}{K\phi}$$

e in corrispondenza della coppia di spunto

$$C_{m0} = \frac{K\phi V}{R_a}.$$

La coppia di spunto è solitamente molto più elevata della coppia di pieno carico. La figura 6.6 mostra un esempio di caratteristica meccanica per un motore a corrente continua con autoeccitazione in parallelo.

### 6.2.2.3 Motore ad eccitazione indipendente

Il motore a corrente continua con eccitazione indipendente ha un funzionamento simile a quello del motore con autoeccitazione in parallelo con l'importante differenza che i circuiti di eccitazione e di armatura possono essere alimentati in modo diverso. Un circuito equivalente di un motore ad eccitazione separata molto semplificato è mostrato in figura 6.7. L'analisi del funzionamento del motore ad eccitazione indipendente è del tutto simile a quella del motore con autoeccitazione in parallelo e la ragione principale per separare i due circuiti risiede nella possibilità di controllare meglio la velocità del motore. In certi casi l'eccitazione può essere fornita da magneti permanenti calettati sull'intradosso dello statore. In questo caso, tuttavia, il flusso di eccitazione, proveniente

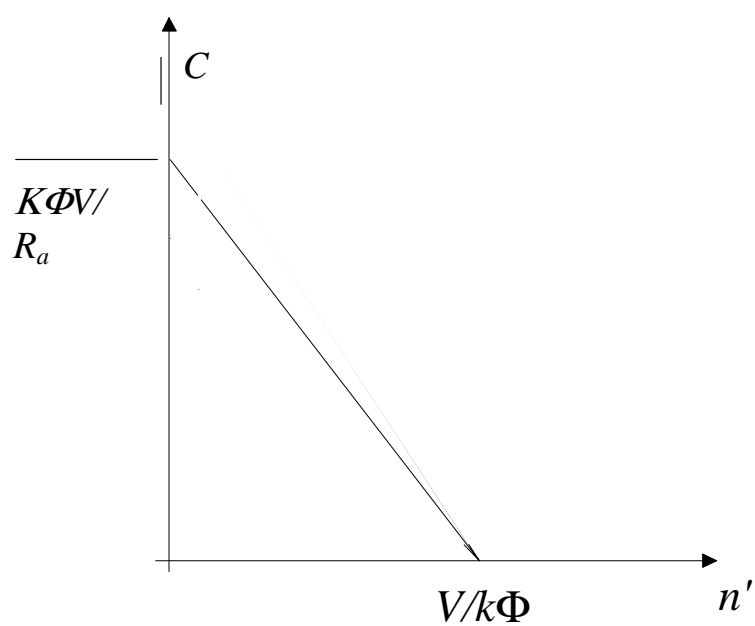


Figura 6.6: Caratteristica meccanica di un motore a corrente continua con autoeccitazione in parallelo

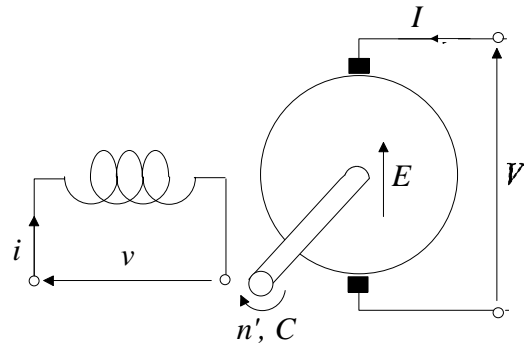


Figura 6.7: Motore a corrente continua con eccitazione indipendente.

dai magneti, non può essere modificato. I motori a magneti permanenti hanno tuttavia il vantaggio che non viene utilizzata energia per produrre il flusso e, quindi, l'efficienza del motore nel suo complesso ne trae beneficio. Inoltre lo spazio occupato dai magneti è generalmente inferiore a quello che serve per l'alloggiamento degli avvolgimenti e quindi si possono realizzare motori di piccole e piccolissime dimensioni utilissimi per applicazioni che necessitano solo di pochi watt o frazioni di watt. Lo svantaggio di questi motori è legato al fatto che i magneti si possono smagnetizzare in parte per effetto del calore o di eccessive correnti di armatura. In tali casi il flusso si riduce di intensità e con esso la coppia massima che il motore può fornire. Quindi il campo di applicazione più adatto a questi motori è quello di funzionamenti ad elevate velocità e coppie relativamente piccole.

#### 6.2.2.4 Motore con autoeccitazione in serie

Il circuito equivalente di un motore a corrente continua con autoeccitazione in serie è del tipo rappresentato in figura 6.8. L'avvolgimento di eccitazione è, appunto, in serie con quello di armatura. Gli avvolgimenti di eccitazione sono di grande diametro a differenza di quelli dei motori con autoeccitazione in parallelo, per ridurre le resistenze e le cadute di tensione che si manifestano negli avvolgimenti a causa della loro resistenza non nulla.

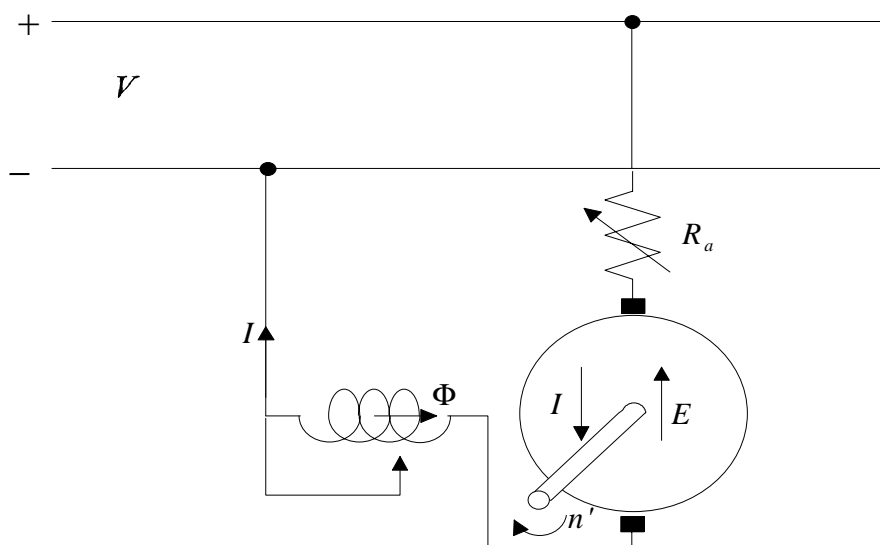


Figura 6.8: Motore a corrente continua con autoeccitazione in serie.

Per derivare la caratteristica meccanica di questo motore, facciamo l'ipotesi che tra il flusso di induzione magnetica e la corrente che lo produce, esista una relazione di tipo lineare ossia

$$\phi = K_e I \quad (6.9)$$

in cui  $K_e$  rappresenta una costante che dipende essenzialmente dal numero degli avvolgimenti di eccitazione, dalla geometria del circuito magnetico e dalla caratteristica di magnetizzazione del materiale ferromagnetico. Purtroppo tale ipotesi può talora non essere realistica a causa del fenomeno della saturazione. Tuttavia, escludendo in prima approssimazione la saturazione, possiamo sostituire la (6.9) nelle (6.4) e (6.5) ottenendo rispettivamente

$$E = K K_e I n'$$

e

$$C_m = K K_e I^2.$$

Se applichiamo la  $LT$  al circuito di figura 6.8 in condizioni di regime, otteniamo

$$V = R_a I + E$$

che, introducendo l'espressione per la f.c.e.m. vista sopra ed esplicitando per la corrente, consente di scrivere

$$I = \frac{V}{R_a + K K_e n'}. \quad (6.10)$$

Infine, sostituendo nell'espressione della coppia meccanica il quadrato della (6.10) si ottiene la caratteristica meccanica

$$C_m = \frac{K K_e V^2}{(R_a + K K_e n')^2} \quad (6.11)$$

un grafico della quale è fornito in figura 6.9. La caratteristica visualizzata è quella teorica poichè non tiene conto degli effetti dovuti agli attriti meccanici, fluidodinamici e della saturazione del materiale ferromagnetico. Quest'ultima limita la coppia di spunto ad un valore generalmente inferiore in quanto allo spunto la corrente d'armatura è massima come previsto dalla (6.10) e ciò può comportare la saturazione del ferro<sup>1</sup>. Gli

<sup>1</sup>Si ricordi che se la corrente è massima anche il flusso per la (6.9) lo è.

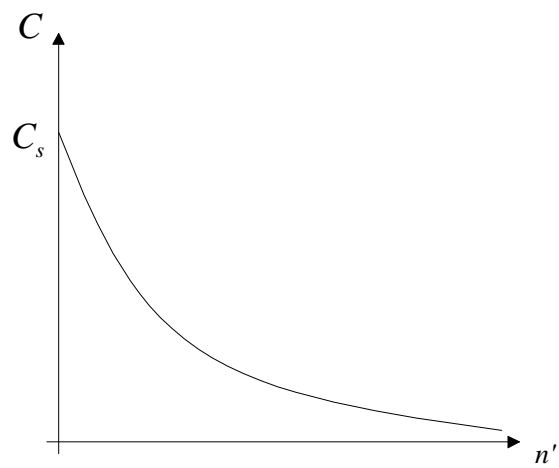


Figura 6.9: Caratteristica meccanica del motore a corrente continua con eccitazione in serie.

attriti limitano la velocità massima raggiungibile a vuoto teoricamente infinita. Tuttavia è opportuno prevedere per i casi in cui a vuoto le velocità raggiungibili fossero pericolose dispositivi di sicurezza che interrompano l'alimentazione del motore nei casi in cui il carico sia scollegato dall'albero motore.

L'espressione della coppia, che dipende dal quadrato della tensione di alimentazione, consente di esercire questo motore anche in corrente alternata. In tale caso è opportuno che lo statore sia laminato per limitare le perdite nel ferro per correnti parassite. A parità di tensione di alimentazione, tuttavia, le correnti in gioco saranno ridotte nel caso alternato rispetto a quello in continua per l'inevitabile insorgere di reattanze nei circuiti di eccitazione e di armatura che aumentano l'impedenza totale. Motori previsti per entrambi i tipi di alimentazione sono detti *universali* e trovano il loro prevalente impiego in tutti i casi in cui si richiede un elevata potenza specifica (W/kg) di cui questi motori godono. Si prestano ad applicazioni di dispositivi potenti e portatili e che richiedono una buona coppia di spunto quali i casi di trapani, seghe, mescolatori, frullatori ecc. Sono motori che erogano la potenza nominale in modo pressochè costante su tutto l'intervallo di funzionamento operativo e che raggiungono regimi di rotazione molto più alti degli altri tipi di motori a corrente alternata che come vedremo risultano solitamente limitati ad un valore massimo dipendente dalla frequenza di alimentazione.

### 6.2.3 Regolazione della velocità dei motori a corrente continua

Il controllo della velocità è un aspetto importante di molte applicazioni ed esistono vari metodi per conseguire il controllo della velocità di rotazione dei motori a corrente continua i principali sono

1. variazioni della tensione di alimentazione del circuito d'armatura ad eccitazione costante
2. variazioni della tensione del circuito di eccitazione con tensione d'armatura costante
3. inserimento di resistenze in serie al circuito d'armatura.

Vediamo brevemente gli aspetti principali di queste tecniche.

### 6.2.3.1 Variazioni nella tensione d'armatura

Questa tecnica è efficace solo per i motori ad eccitazione separata o con eccitazione fornita da magneti permanenti. Nei motori con eccitazione in parallelo l'aumento della tensione di alimentazione fa aumentare anche la corrente di eccitazione e, di conseguenza, il flusso. L'aumento del flusso che si accompagna a quello della tensione tende a controbilanciare gli effetti della tensione sulla velocità che subisce solo piccole modifiche. Nei casi in cui questa tecnica è applicabile, invece, si può osservare in prima approssimazione che trascurando le cadute ohmiche sul circuito d'armatura, la f.c.e.m. è circa pari alla tensione di alimentazione ossia

$$E_a \cong V$$

e, poichè vale anche

$$E_a = K\phi n'$$

risulta immediata la relazione

$$n' \cong \frac{V}{K\phi}$$

da cui il fatto che il regime di rotazione è approssimativamente proporzionale alla tensione di alimentazione nel caso in cui l'eccitazione resti costante.

Nel caso dei motori con autoeccitazione in serie, l'aumento della tensione di alimentazione provoca un aumento anche del flusso ma, essendo la coppia proporzionale al quadrato della tensione, un aumento di questa produce un aumento significativo della coppia motrice e generalmente<sup>2</sup> anche di velocità. Quanto detto è visualizzato in figura 6.10.

### 6.2.3.2 Variazioni della corrente di eccitazione

Quando l'eccitazione è indipendente o in parallelo, si può eseguire un controllo di velocità basato sulla variazione della corrente di eccitazione. A tale scopo occorre inserire un reostato (resistenza variabile) in serie al circuito di eccitazione. Per i motori a magneti permanenti il cui flusso è costante, e per quelli eccitati in serie per i quali la corrente di eccitazione coincide con quella di armatura, tale regolazione non è attuabile.

---

<sup>2</sup>Occorre in questo caso avere qualche conoscenza della curva coppia resistente-regime di giri.

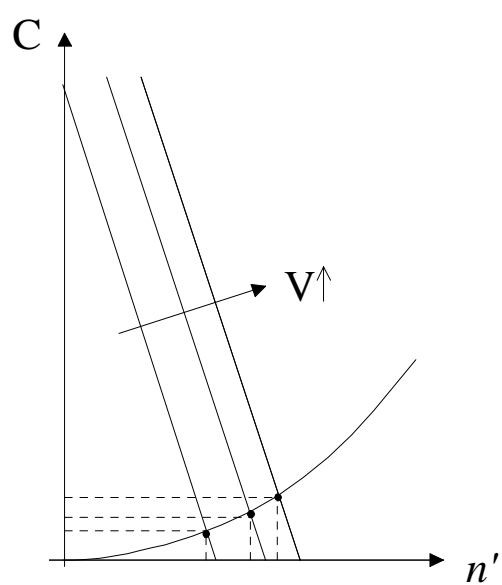


Figura 6.10: Caratteristica meccanica per motori a corrente continua con eccitazione separata per valori crescenti della tensione di alimentazione

Ricordando le relazioni fondamentali valide per i motori a corrente continua eccitati in parallelo o con eccitazione indipendente:

$$E_a = K\phi n'$$

$$I_a = \frac{V - E_a}{R_a}$$

$$C_m = K\phi I_a$$

consideriamo cosa può succedere, ad esempio, riducendo la corrente di eccitazione (agendo sul reostato inserito in tale circuito). Naturalmente il flusso  $\phi$  diminuisce e con esso la f.c.e.m.  $E_a$ . Dalle relazioni sopra si osserva allora un aumento di  $I_a$  più che proporzionale in quanto essendo  $V$  ed  $E_a$  poco diversi, una variazione percentuale di quest'ultima grandezza si ripercuote con una variazione percentuale molto maggiore della corrente d'armatura. La coppia, allora, aumenta anche se  $\phi$  diminuisce, in quanto la variazione percentuale della corrente d'armatura è, per l'appunto, più elevata e di segno positivo. La velocità, a parità di carico allora aumenta. L'inverso avviene per aumenti della corrente di eccitazione. Si osservi la figura 6.11.

In questi tipi di azionamenti è importante evitare che il circuito di eccitazione resti privo di alimentazione in quanto sopravviverebbe un sia pure minimo  $\phi$  residuo nel materiale ferromagnetico. Per quanto detto sopra questo comporta un incremento molto rapido della corrente di armatura accompagnato da un incremento altrettanto brusco della coppia motrice. Si possono raggiungere in questi casi velocità molto pericolose per l'integrità del motore. In qualche secondo il rotore potrebbe andare in pezzi per la forza centrifuga e ridursi ad una pila di inutili rottami consistenti in avvolgimenti allentati e stirati così pure le barre del commutatore che potrebbero sollevarsi e deformarsi in vari punti. Occorre perciò prevedere opportuni circuiti di protezione che scolleghino il circuito di armatura dall'alimentazione qualora la corrente di eccitazione scenda sotto valori troppo bassi.

### 6.2.3.3 Controllo di velocità mediante reostato in serie con il circuito d'armatura

L'ultimo metodo per controllare la velocità di un motore a corrente continua che consideriamo è quello che prevede l'inserimento di un reostato in serie al circuito d'armatura. Questo metodo è applicabile a tutti i

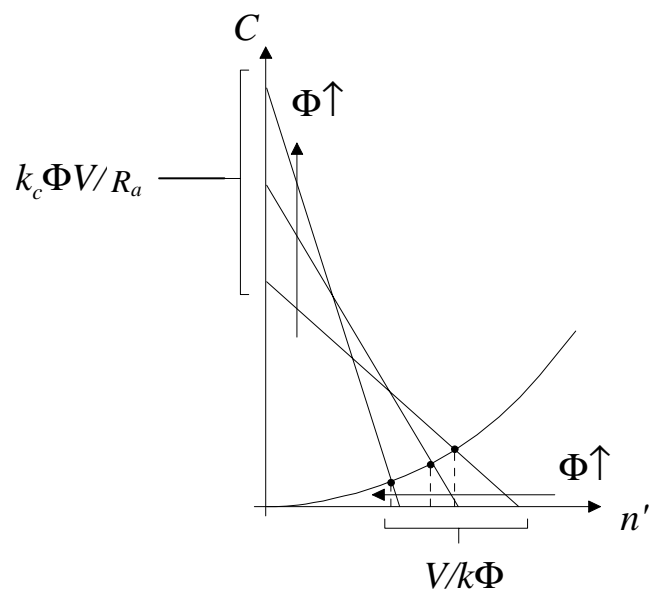


Figura 6.11: Effetto della corrente di eccitazione sulla caratteristica meccanica del motore con eccitazione indipendente

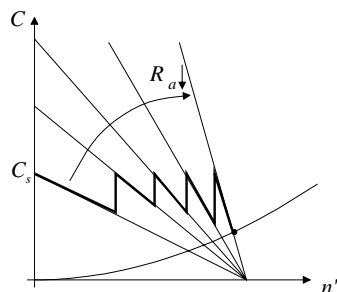


Figura 6.12: Avviamento e regolazione di velocità con reostato in serie all'armatura.

tipi di motori visti. Se consideriamo, per esempio, il caso del motore con autoeccitazione in parallelo, se con  $R_a$  denominiamo la resistenza complessiva d'armatura comprendente sia quella propria degli avvolgimenti sia del reostato in serie, la relazione tra coppia motrice sviluppata e regime di rotazione dell'albero motore è data dalla

$$C_m = \frac{K\phi}{R_a} (V - K\phi n')$$

valida anche nei casi di motori ad eccitazione indipendente e a magneti permanenti. Si veda la figura 6.12 come esempio di tale tecnica.

Naturalmente, la regolazione reostatica costituisce un dispendio di energia per certi versi inutile e quindi dovrebbe essere utilizzata con parsimonia. Anche il motore con eccitazione in serie ha una caratteristica meccanica per la quale l'utilizzo di un reostato sul circuito produce una diminuzione di coppia per ogni aumento di resistenza e viceversa a qualunque regime di rotazione.