

Banda passante di un sistema lineare

- Consideriamo un sistema lineare con funzione di trasferimento $G(s)$. La funzione di risposta armonica del sistema lineare è $G(j\omega)$.
- Applichiamo in ingresso al sistema lineare un segnale $x(t)$ con spettro $X(j\omega)$. Lo spettro $Y(j\omega)$ della risposta $y(t)$ si ottiene come:

$$Y(j\omega) = G(j\omega) X(j\omega)$$

- Gli spettri di ampiezza e fase della risposta $y(t)$ risultano quindi:

$$|Y(j\omega)|_{dB} = |G(j\omega)|_{dB} + |X(j\omega)|_{dB}$$

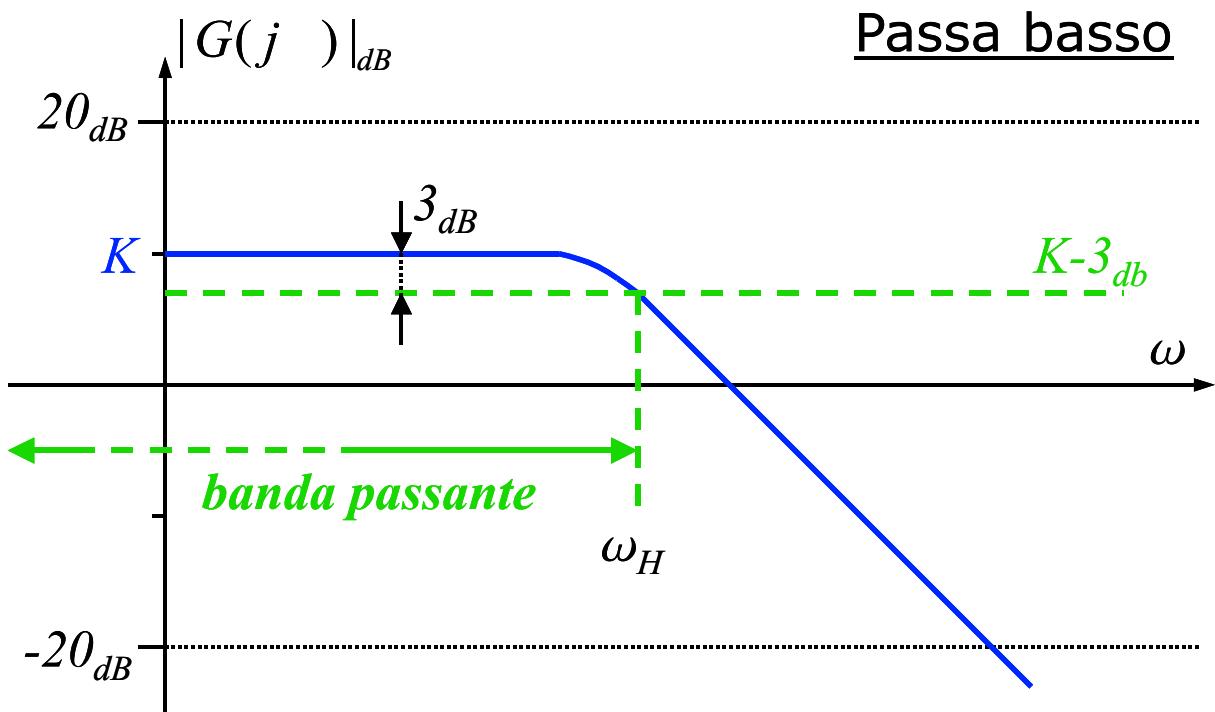
$$\angle Y(j\omega) = \angle G(j\omega) + \angle X(j\omega)$$

- Lo spettro $Y(j\omega)$ della risposta è dunque una versione, alterata dalla funzione di risposta armonica $G(j\omega)$, dello spettro $X(j\omega)$ del segnale di ingresso. Si dice che il sistema lineare filtrà il segnale di ingresso.
- Le differenze nello spettro equivalgono a differenze nella risposta temporale. Il sistema lineare riuscirà a inseguire esattamente l'andamento del segnale di ingresso, ovvero $y(t) = K x(t)$ ($K > 0$), se e solo se:

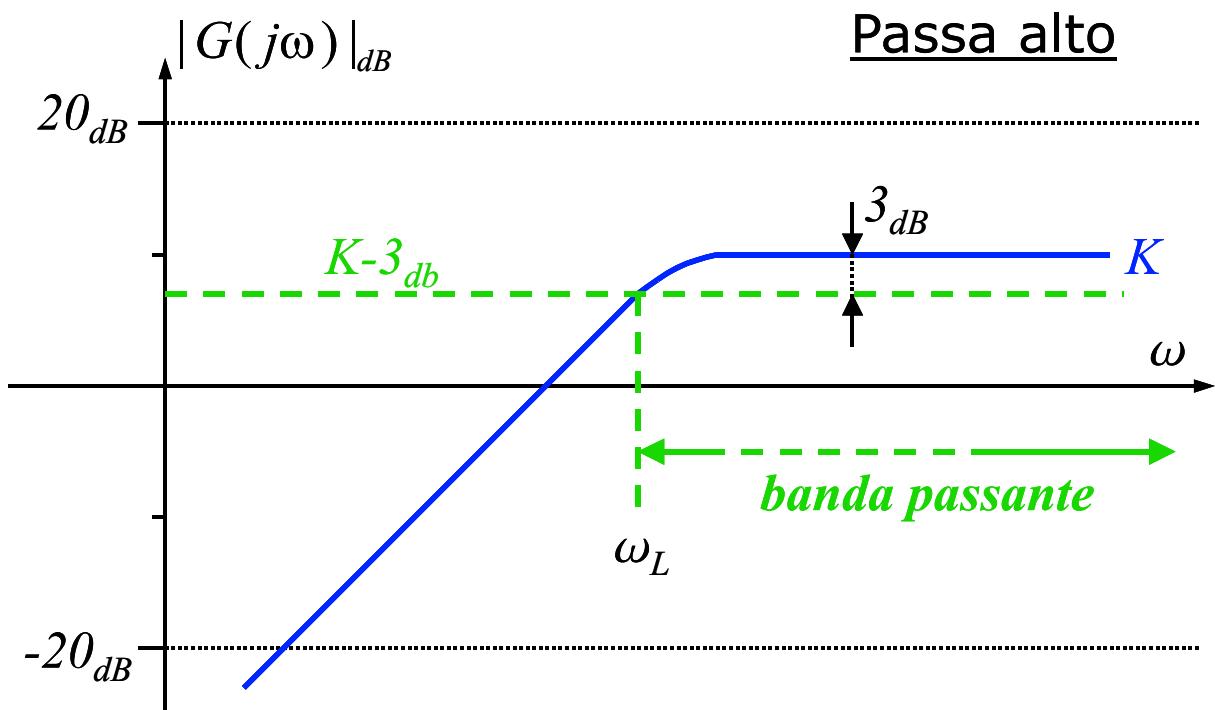
$$|G(j\omega)| = K \quad \text{e} \quad \angle G(j\omega) = 0$$

- Le differenze tra la risposta $y(t)$ e il segnale di ingresso $x(t)$ sono tanto maggiori quanto più $|G(j\omega)| \neq K$ e $\angle G(j\omega) \neq 0$.
- Per molti sistemi lineari esiste solo un intervallo di pulsazioni ω per il quale vale la relazione $|G(j\omega)| \simeq K$ e $\angle G(j\omega) \simeq 0$. Questo intervallo di valori di ω si chiama banda passante.
- Per convenzione la banda passante (nella maggior parte dei casi di interesse pratico) è data dai valori di ω per i quali $|G(j\omega)|_{dB} \geq K - 3_{dB}$.
- Tipicamente la banda passante è data da un intervallo di valori del tipo $\omega_L \leq \omega \leq \omega_H$ con ω_L e ω_H dette pulsazioni di taglio.

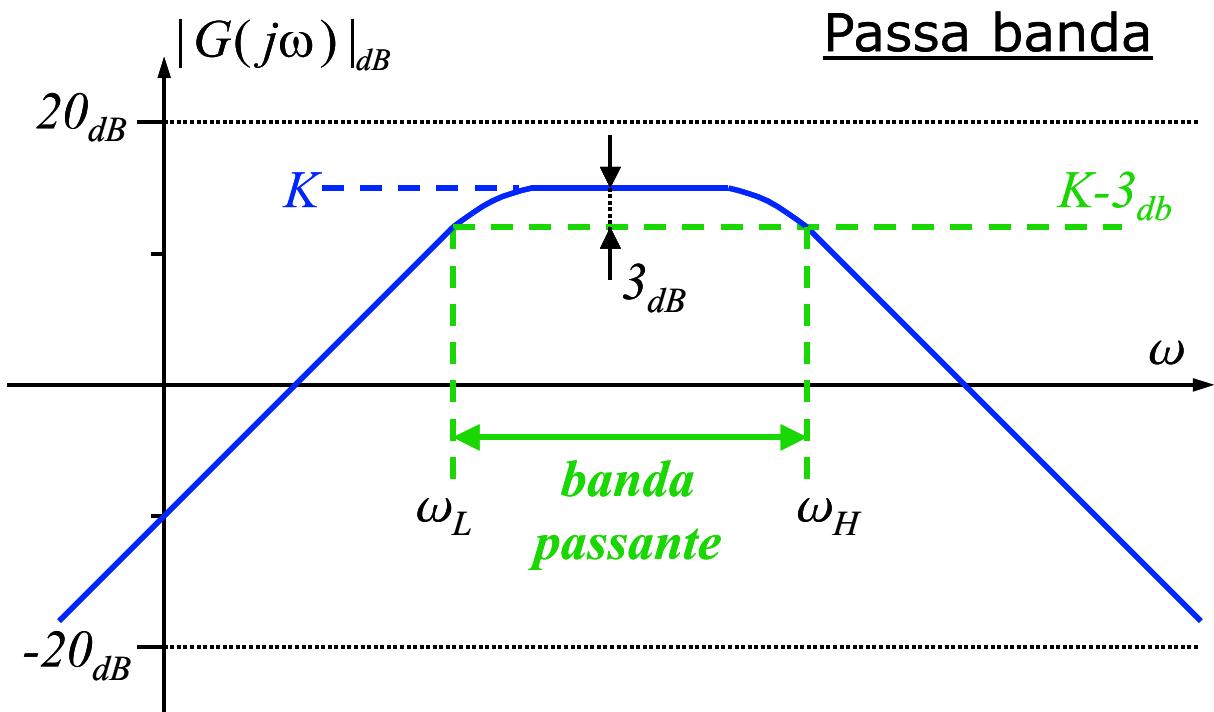
- Sistema di tipo passa basso. Banda passante $0 \leq \omega \leq \omega_H$.



- Sistema di tipo passa alto. Banda passante $\omega_L \leq \omega \leq \infty$.

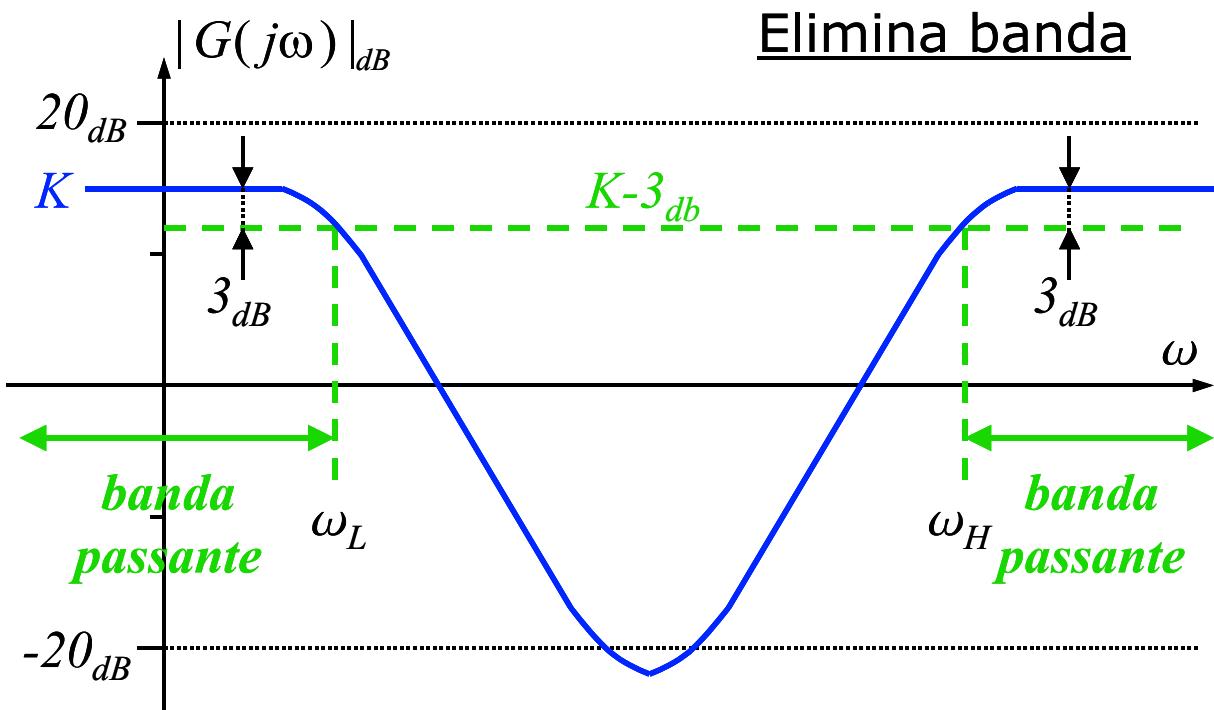


- Sistema di tipo passa banda. Banda passante $\omega_L \leq \omega \leq \omega_H$.



- Sistema di tipo elimina banda.

Banda passante $0 \leq \omega \leq \omega_L$ e $\omega_H \leq \omega \leq \infty$.



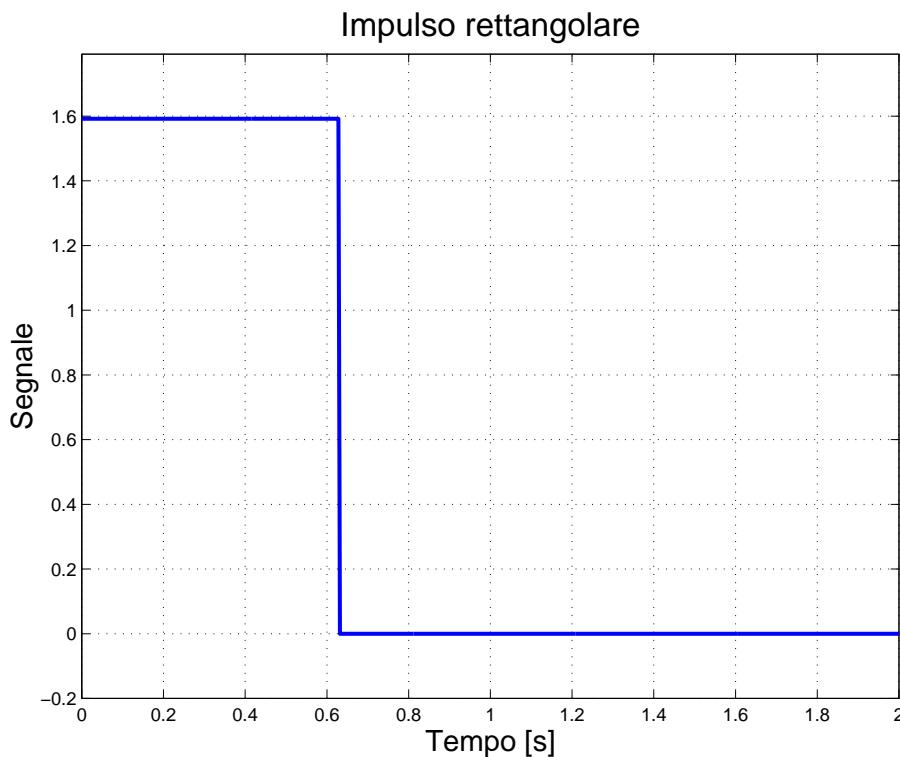
- Consideriamo un sistema del primo ordine con guadagno statico unitario:

$$G(s) = \frac{1}{1 + \tau s}$$

- I sistemi del primo ordine sono di tipo passa basso e la loro banda passante è $0 \leq \omega \leq \omega_H$ con:

$$\omega_H = \frac{1}{\tau}$$

- Applichiamo in ingresso al sistema $G(s)$ un impulso rettangolare $x(t)$ di durata t_0 e ampiezza $1/t_0$ (quindi area unitaria). Sia ad esempio $t_0 = 2\pi/10$:



- La trasformata di Laplace $X(s)$ del segnale di ingresso $x(t)$ risulta:

$$X(s) = \frac{1}{t_0 s} (1 - e^{-t_0 s})$$

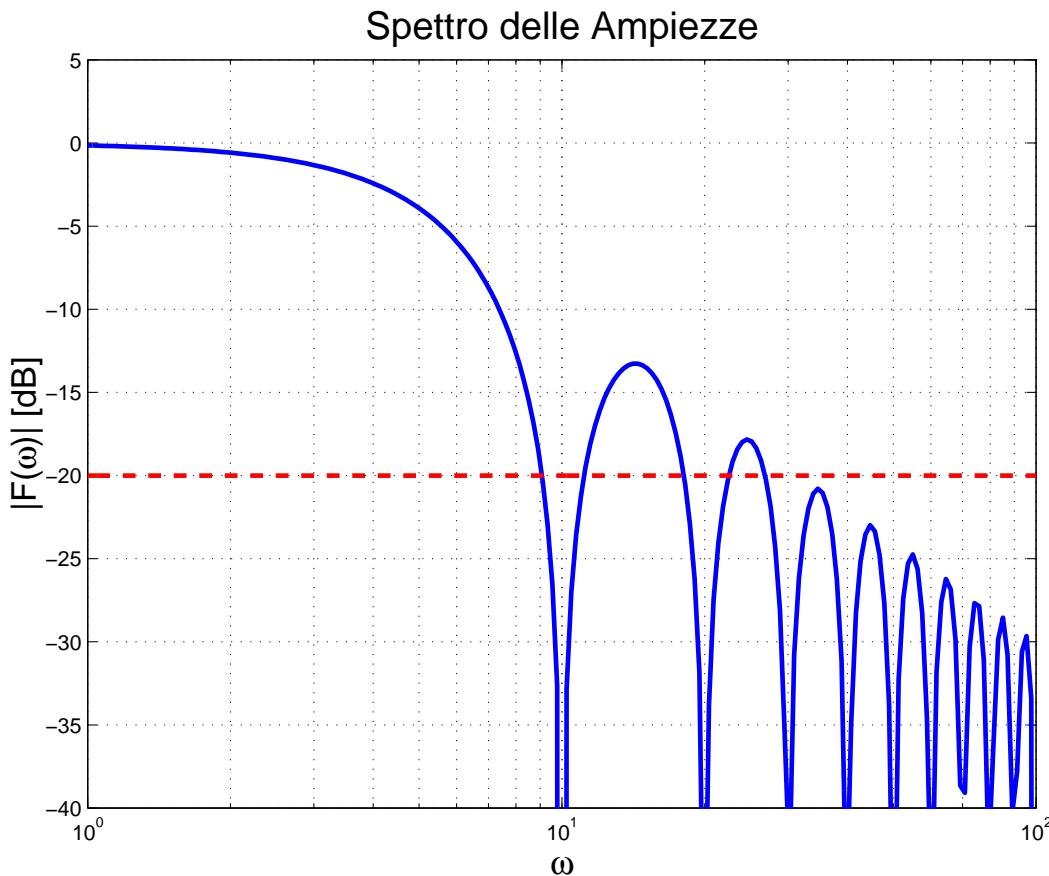
- Lo spettro $X(j\omega)$ del segnale di ingresso $x(t)$ risulta quindi:

$$X(j\omega) = \frac{1}{t_0 j\omega} (1 - e^{-j\omega t_0})$$

- Lo spettro $X(j\omega)$ del segnale di ingresso $x(t)$ risulta:

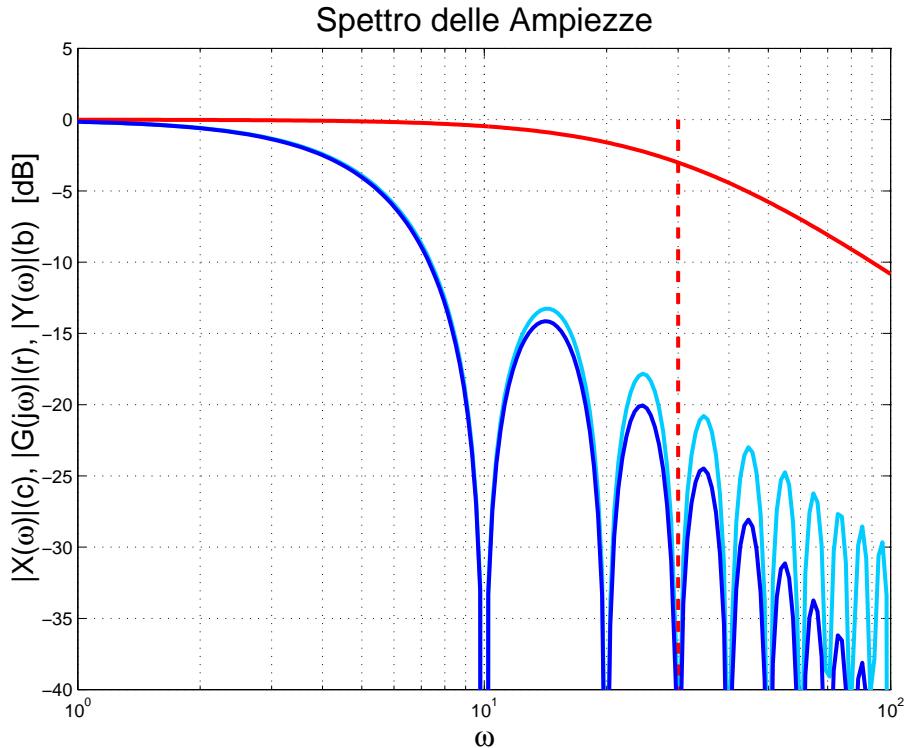
$$X(j\omega) = \frac{1}{t_0 j\omega} (1 - e^{-j\omega t_0})$$

- Per $t_0 = 2\pi/10$ lo spettro $X(j\omega)$ risulta:

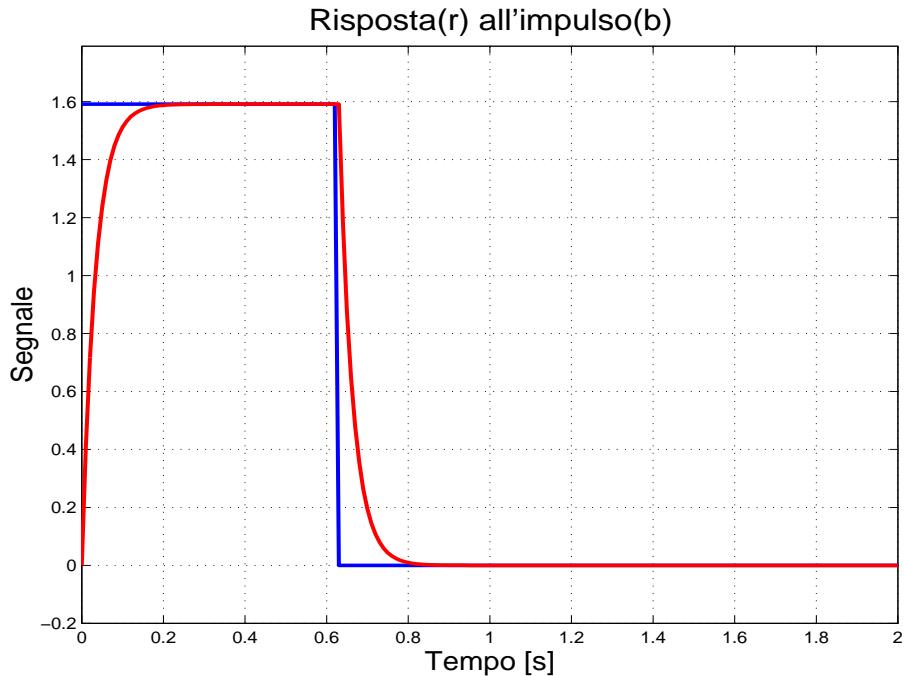


Lo spettro si annulla per $\omega = n\omega_0$ con $\omega_0 = 2\pi/t_0$. Per $\omega > 3\omega_0$ lo spettro delle ampiezze del segnale è inferiore a 1/10 rispetto allo spettro alle basse pulsazioni.

- Sia $\omega_H = 30 = 3\omega_0$. Lo spettro $Y(j\omega)$ della risposta $y(t)$ risulta:

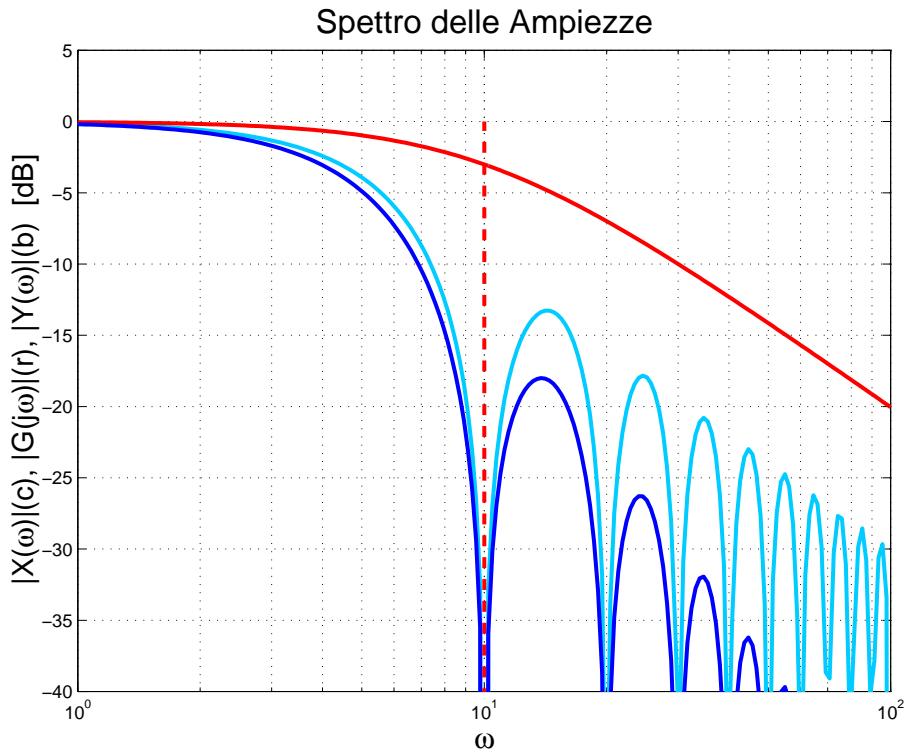


- L'andamento temporale della risposta nel tempo risulta:

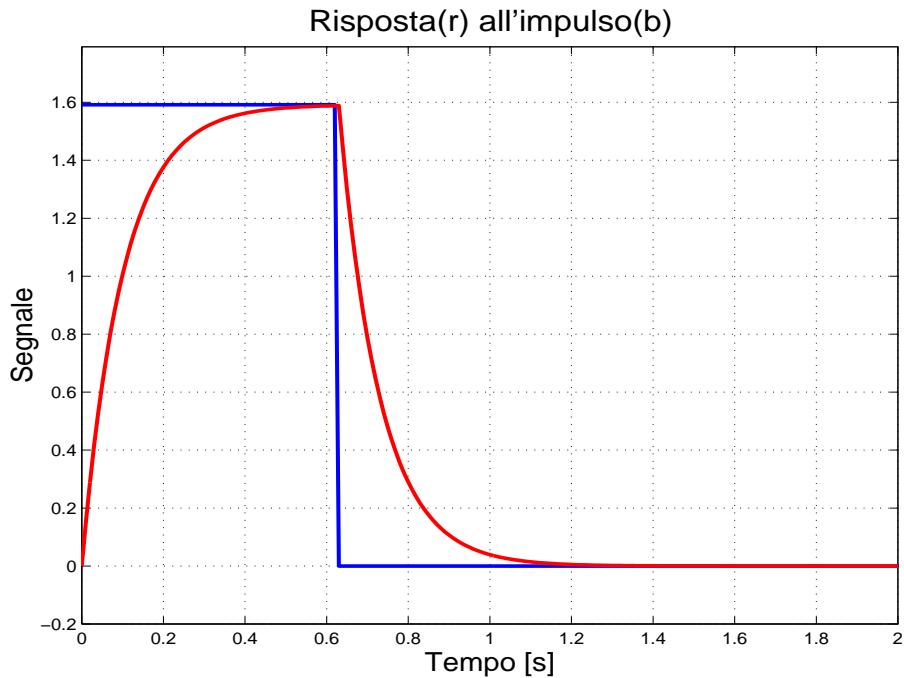


- Le principali componenti spettrali (per $\omega < 2\omega_0$) passano praticamente invariate all'uscita del sistema lineare. Invece le componenti spettrali per $\omega > \omega_H$ sono attenuate dal sistema del primo ordine. Quindi la risposta $y(t)$ non può essere veloce come il segnale di ingresso $x(t)$, ma si mantiene una buona similitudine fra i due segnali.

- Sia $\omega_H = 10 = \omega_0$. Lo spettro $Y(j\omega)$ della risposta $y(t)$ risulta:

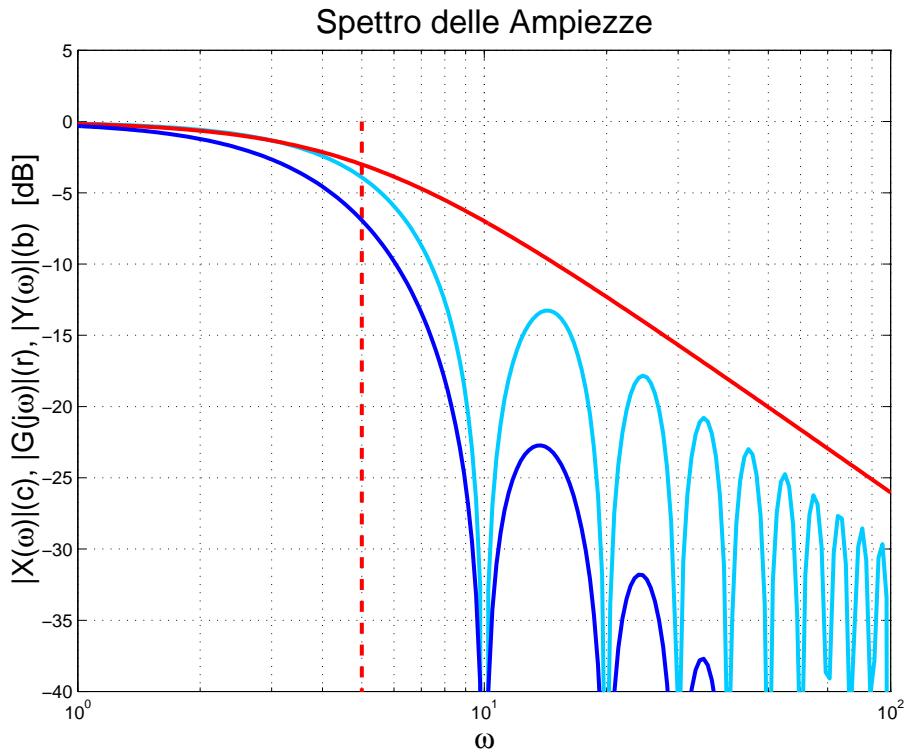


- L'andamento temporale della risposta nel tempo risulta:

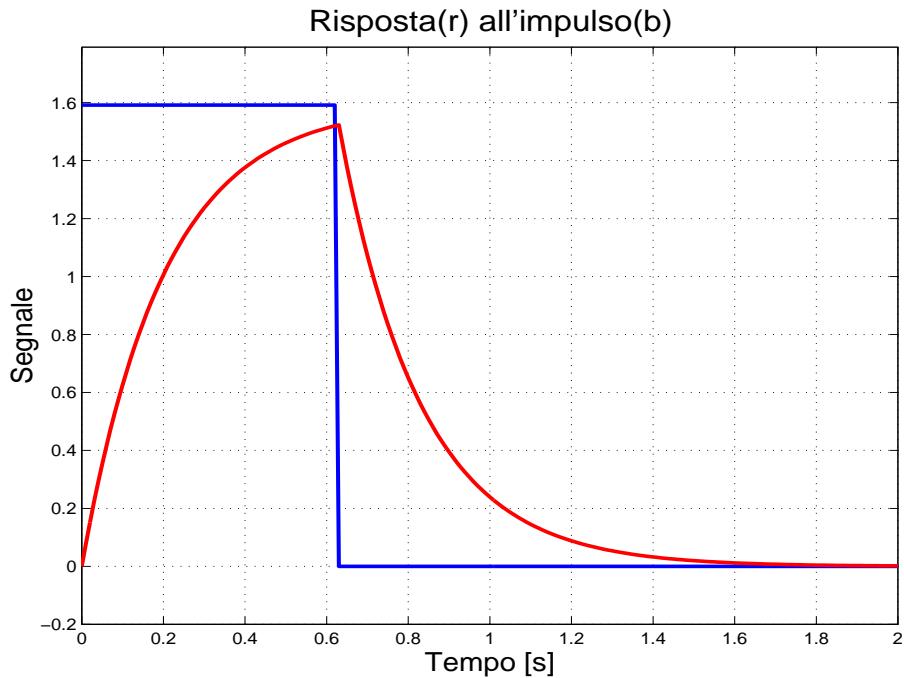


- Rispetto al caso precedente anche una parte delle principali componenti spettrali (per $\omega_0 < \omega < 2\omega_0$) è attenuata dal sistema del primo ordine. In $Y(j\omega)$ si perde buona parte del contenuto in alta frequenza del segnale di ingresso quindi la risposta $y(t)$ è piuttosto lenta.

- Sia $\omega_H = 5 = \omega_0/2$. Lo spettro $Y(j\omega)$ della risposta $y(t)$ risulta:

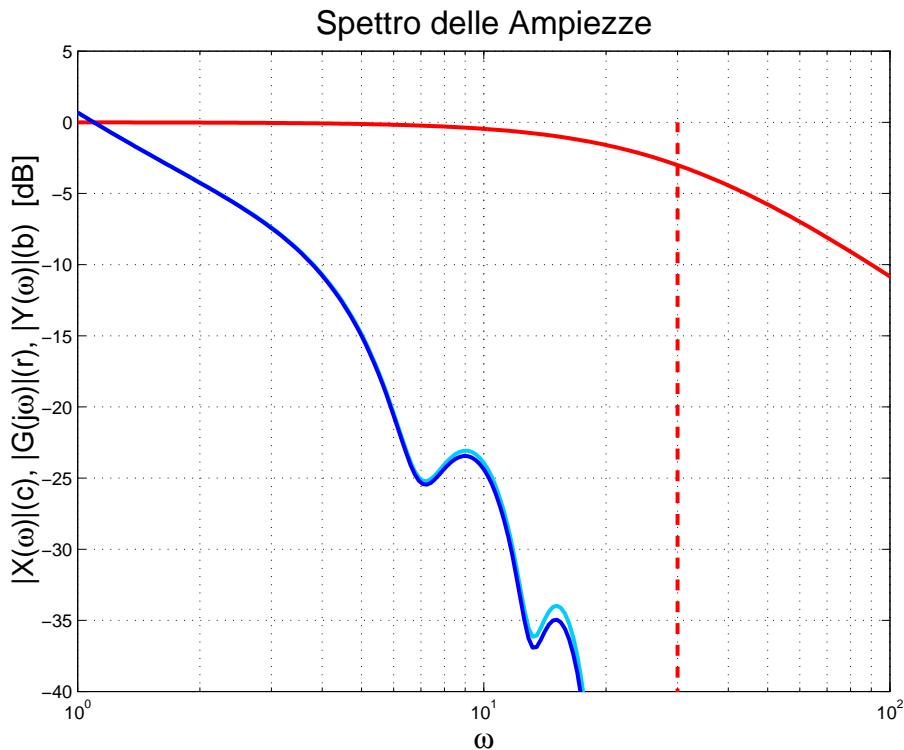


- L'andamento temporale della risposta nel tempo risulta:

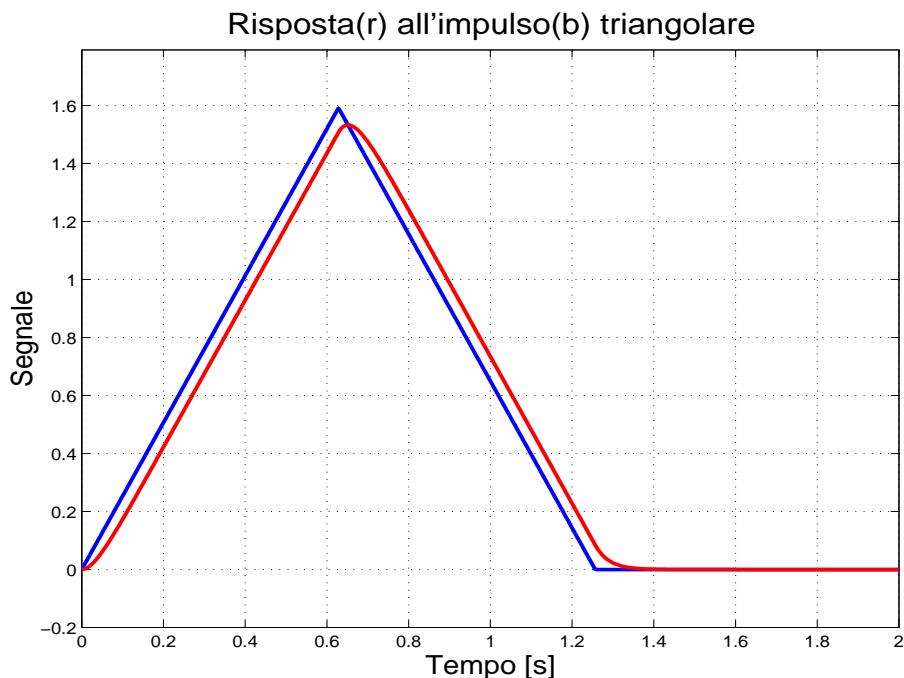


- In questo caso anche le componenti spettrali a bassa frequenza sono attenuate dal sistema del primo ordine e quelle in alta frequenza sono sostanzialmente scomparse. La risposta $y(t)$ è molto lenta e non riesce a seguire per nulla l'ingresso $x(t)$.

- Applichiamo in ingresso al sistema $G(s)$ un impulso triangolare $x(t)$ di durata $2t_0$ e ampiezza $1/t_0$ (area unitaria). Sia ad esempio $t_0 = 2\pi/10$.
- Sia $\omega_H = 30$. Lo spettro $Y(j\omega)$ della risposta $y(t)$ risulta:

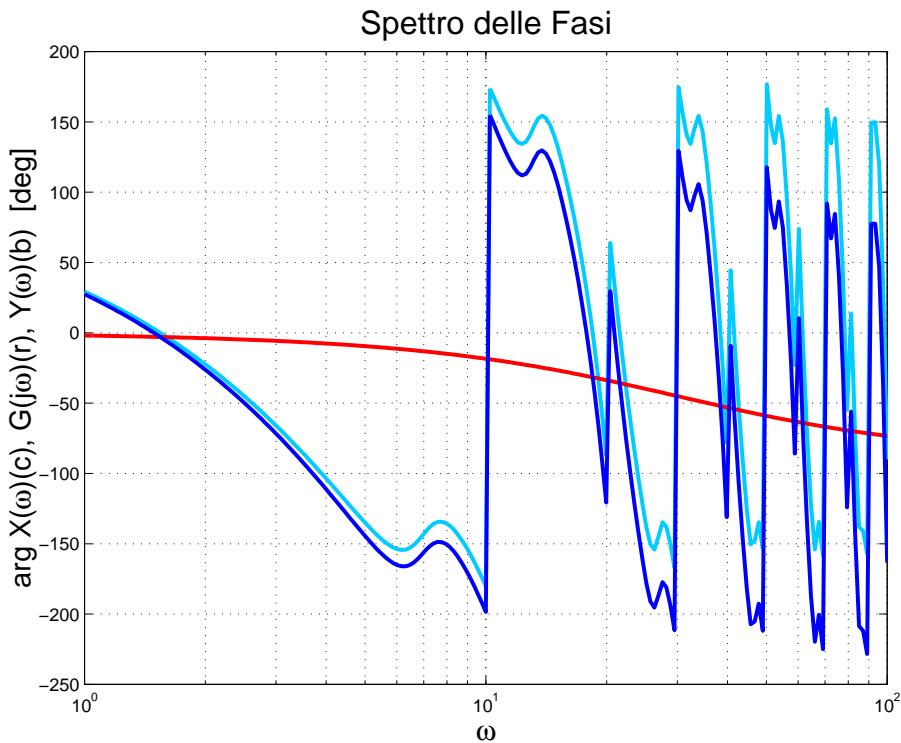


- L'andamento temporale della risposta nel tempo risulta:

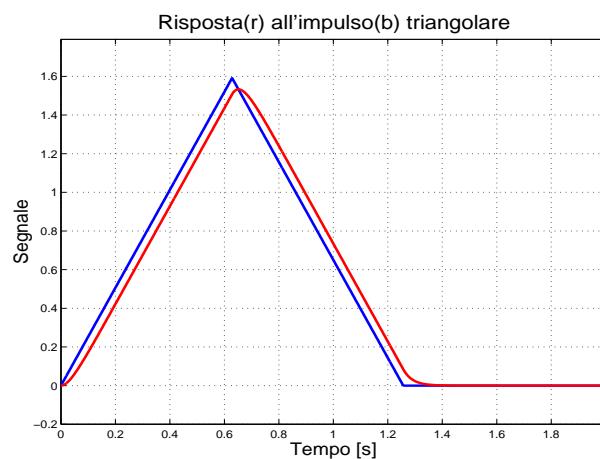


- Lo spettro delle ampiezze di $Y(j\omega)$ è sostanzialmente identico allo spettro di $X(j\omega)$ a cosa è dovuto allora il ritardo di $y(t)$ rispetto a $x(t)$?

- Lo spettro delle fasi della risposta $y(t)$ risulta:



- Mentre lo spettro delle ampiezze di $Y(j\omega)$ è sostanzialmente identico allo spettro di $X(j\omega)$, i due spettri delle fasi differiscono fra loro, anche per pulsazioni relativamente piccole. In particolare lo spettro di fase di $Y(j\omega)$ presenta angoli minori rispetto allo spettro di fase di $X(j\omega)$.
- Si parla in questo caso di sfasamento in ritardo o di ritardo di fase della fase del segnale di uscita rispetto a quella del segnale di ingresso.
- Qualitativamente un ritardo di fase introdotto da un sistema lineare induce un ritardo fra il segnale di ingresso e il segnale di uscita.

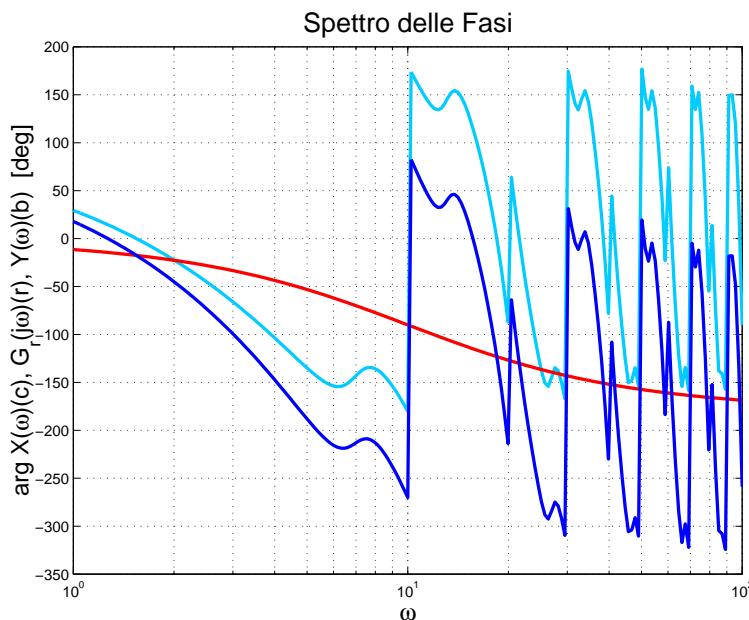


- Si consideri ad esempio il sistema a fase non minima:

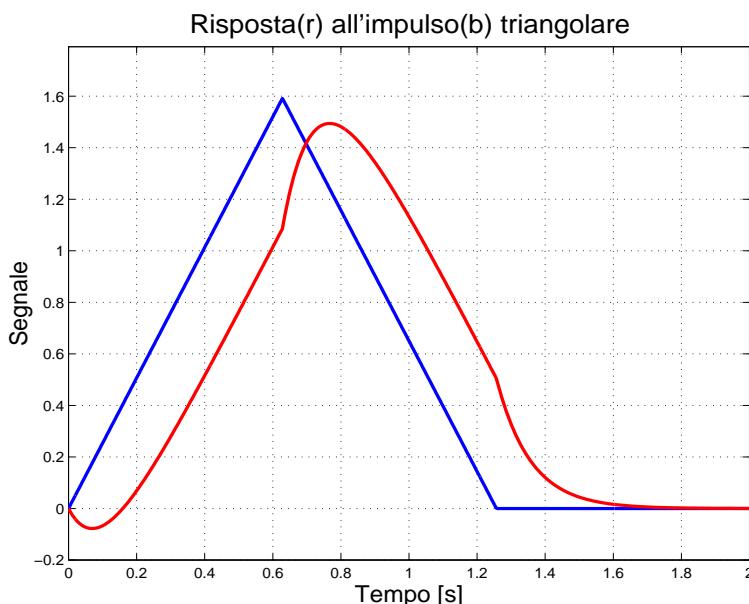
$$G_r(s) = \frac{a - s}{a + s}$$

avente modulo unitario a tutte le pulsazioni (quindi banda infinita), ma che introduce un ritardo di fase da 0 a -180° .

- Gli spettri delle ampiezze di $X(j\omega)$ e di $Y(j\omega)$ sono identici essendo $|G_r(j\omega)| = 1$ per $\forall\omega$. Lo spettro delle fasi (per $a = 10$) della risposta $y(t)$ risulta:

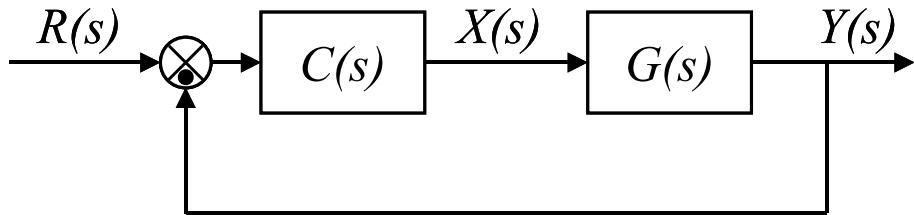


- Il ritardo di fase introdotto dal sistema $G_r(s)$ si traduce in un ritardo del segnale $y(t)$ rispetto a $x(t)$, oltre ad un andamento in controfase in seguito ai cambi di derivata del segnale di ingresso:



Banda passante dei sistemi retroazionati

- Consideriamo un sistema retroazionato con retroazione unitaria:



Il guadagno di anello del sistema $G_a(s)$ e la funzione di trasferimento ingresso-uscita $G_0(s)$ risultano:

$$G_a(s) = C(s)G(s) \quad G_0(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{G_a(s)}{1 + G_a(s)}$$

- La larghezza di banda del sistema retroazionato $G_0(s)$ può essere stimata conoscendo il guadagno d'anello $G_a(s)$.
- Per le pulsazioni ω tali che $|G_a(j\omega)| \gg 1$, vale l'approssimazione:

$$|G_0(j\omega)| = \frac{|G_a(j\omega)|}{|1 + G_a(j\omega)|} \simeq 1$$

mentre per le pulsazioni ω tali che $1 \gg |G_a(j\omega)| \geq 0$, si ha:

$$|G_0(j\omega)| = \frac{|G_a(j\omega)|}{|1 + G_a(j\omega)|} \simeq |G_a(j\omega)| \Rightarrow 1 \gg |G_0(j\omega)| \geq 0$$

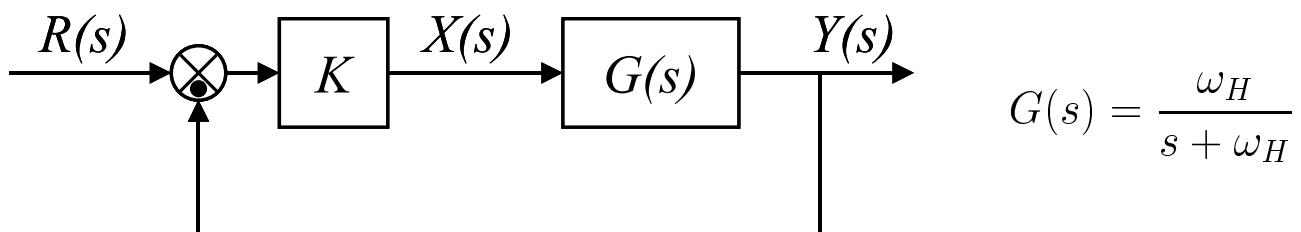
Indicativamente dunque le pulsazioni di taglio che delimitano la banda del sistema retroazionato $G_0(s)$ sono intorno alle pulsazioni ω per le quali $|G_a(j\omega)| \simeq 1$.

- La banda passante di un sistema in retroazione unitaria corrisponde indicativamente alle pulsazioni ω per le quali il modulo del guadagno di anello $|G_a(j\omega)|$ è maggiore di 1.
- Nel caso che non ci siano pulsazioni ω per le quali il modulo del guadagno di anello sia $|G_a(j\omega)| > 1$, la banda del sistema in retroazione unitaria coincide con quella del guadagno di anello.

- Anche per il sistema retroazionato $G_0(s)$ valgono le stesse considerazioni che legano la prontezza del sistema alla sua larghezza di banda. Pertanto per massimizzare la velocità di risposta occorre allargare il più possibile la banda del sistema retroazionato $G_0(s)$.
- Dato che il guadagno di anello $G_a(s) = C(s)G(s)$ contiene come fattore la funzione di trasferimento del controllore $C(s)$ è evidente che generalmente conviene (compatibilmente con la stabilità del sistema e con altre specifiche di controllo) progettare il controllore $C(s)$ con guadagno maggiore possibile. In questo modo si allarga la banda (e quindi aumenta la prontezza) del sistema retroazionato.
- **ATTENZIONE!** Progettando in modo opportuno il controllore $C(s)$ è generalmente possibile, mediante controllo in retroazione, allargare a piacere la banda di un sistema $G(s)$.

Il problema pratico è che l'allargamento di banda di un sistema lento implica l'applicazione di segnali di ingresso di elevata ampiezza che potrebbero non rientrare nelle specifiche del sistema controllato (esempi: saturazioni, limiti meccanici o fisici, limiti energetici,...).

- È quindi consigliabile progettare il sistema da controllare $G(s)$ in modo coerente con le necessità di controllo.
- Consideriamo ad esempio il seguente sistema retroazionato:

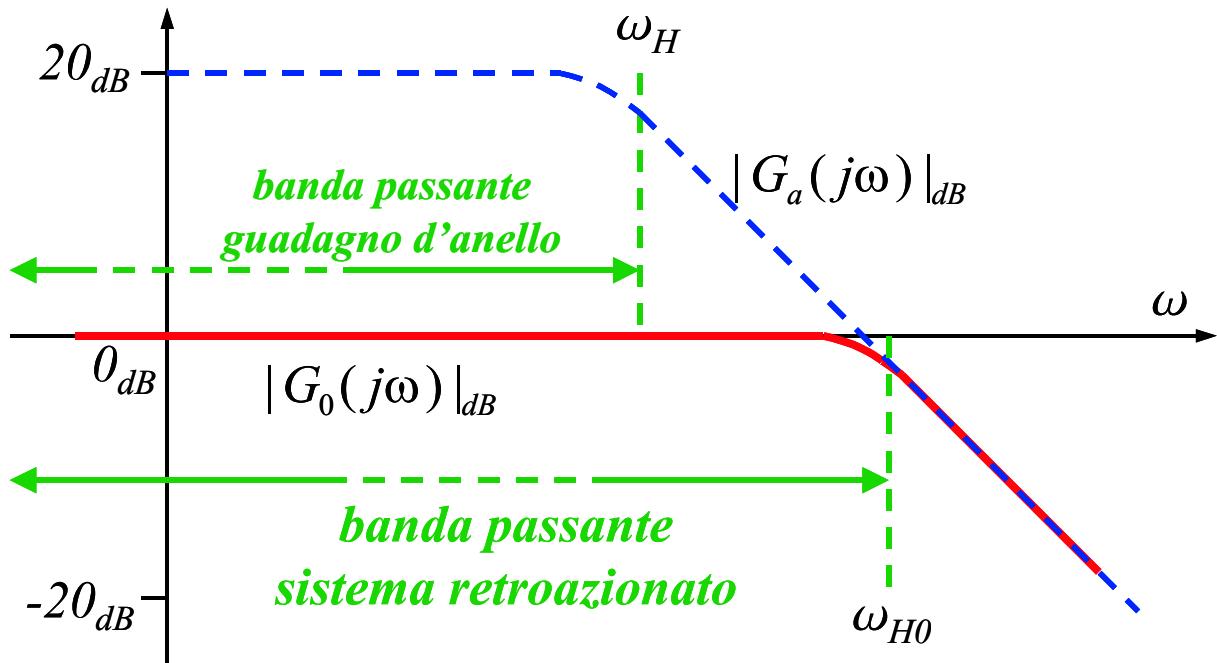


Il guadagno di anello $G_a(s)$ e la funzione di trasferimento ingresso-uscita $G_0(s)$ risultano:

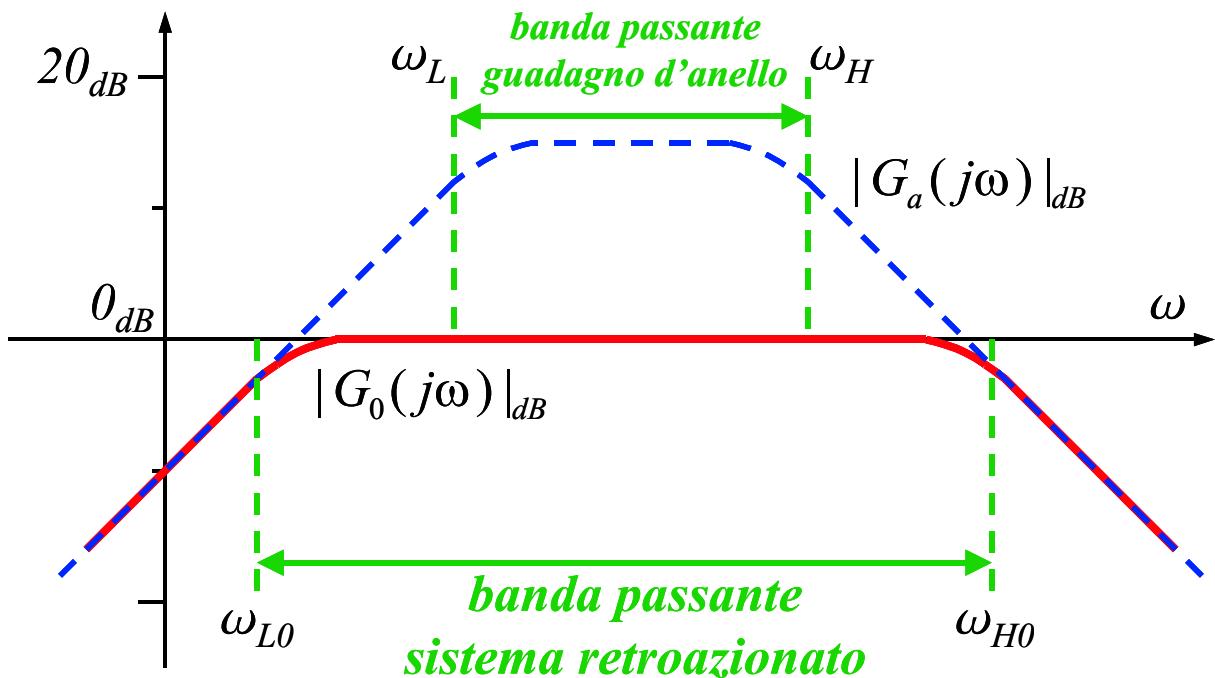
$$G_a(s) = K G(s) = \frac{K \omega_H}{s + \omega_H}$$

$$G_0(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K G(s)}{1 + K G(s)} = \frac{K \omega_H}{s + (K + 1)\omega_H}$$

- Esempio di allargamento della banda tramite retroazione per un guadagno di anello di tipo passa-basso.



- Esempio di allargamento della banda tramite retroazione per un guadagno di anello di tipo passa-banda.



- La funzione di trasferimento del sistema retroazionato è ancora del primo ordine

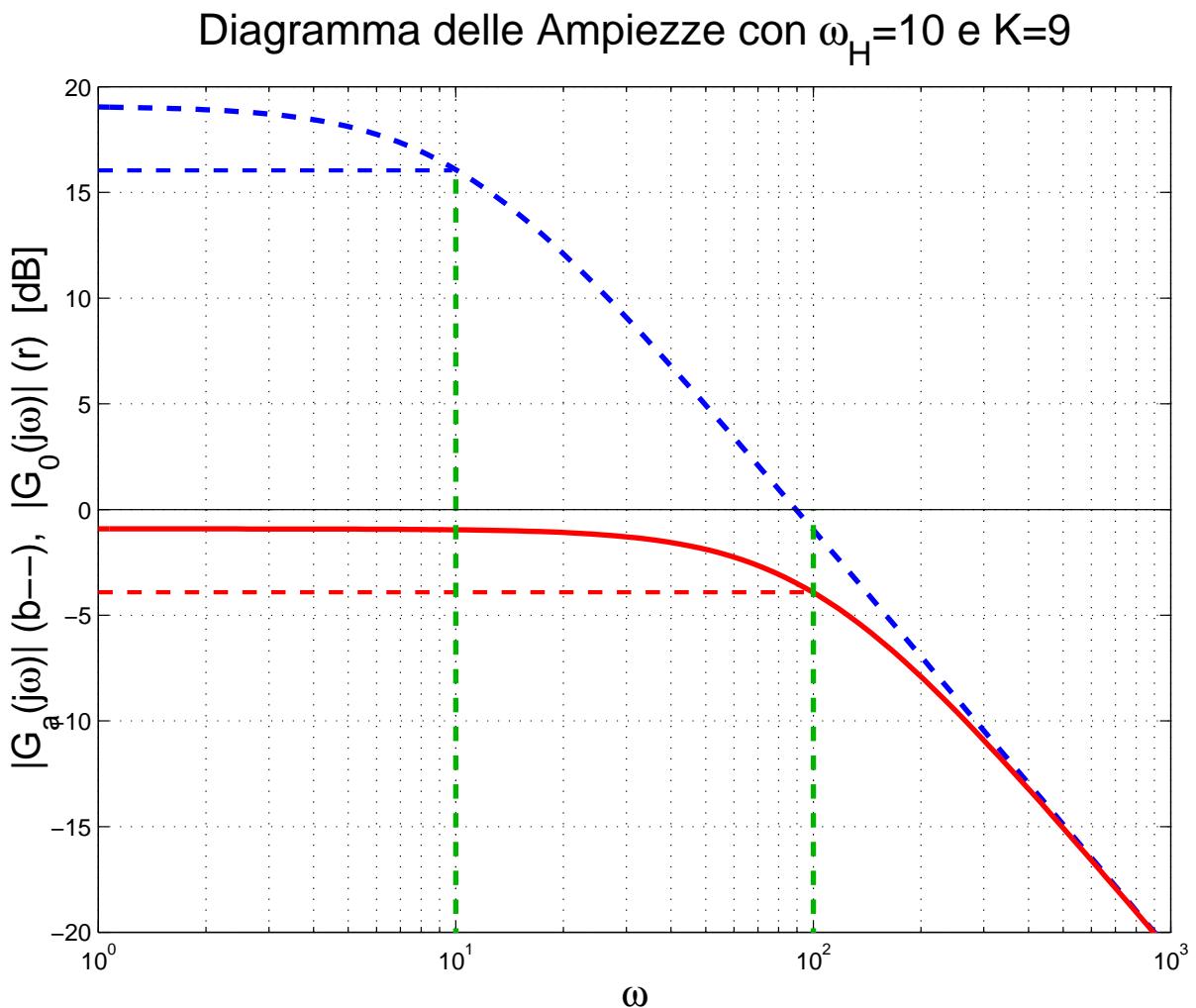
$$G_0(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K G(s)}{1 + K G(s)} = \frac{K \omega_H}{s + (K + 1)\omega_H}$$

quindi ponendo

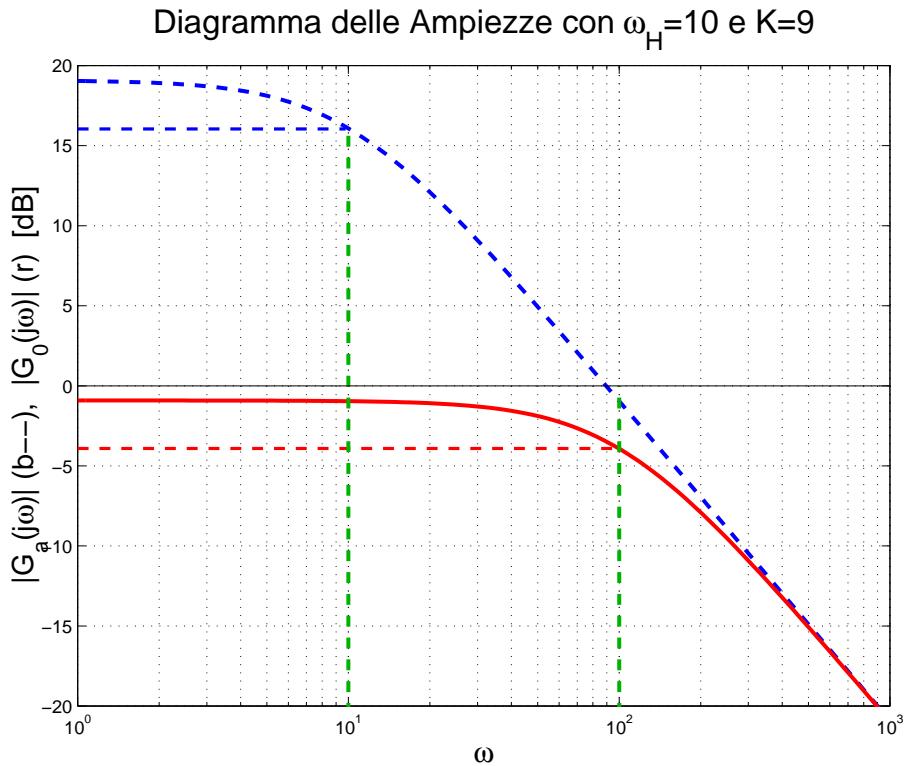
$$K = \frac{\omega_{H0}}{\omega_H} - 1$$

la larghezza di banda del sistema retroazionato passa da ω_H a ω_{H0} .

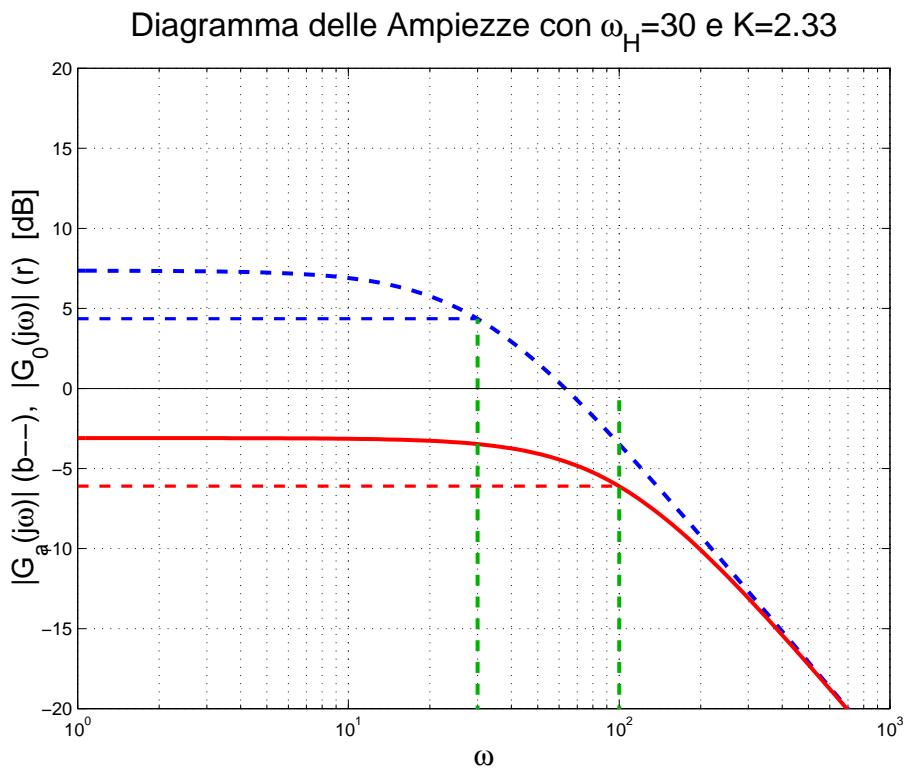
- Con $\omega_H = 10$ e $\omega_{H0} = 100$ i diagrammi delle ampiezze di $G_a(j\omega)$ e $G_0(j\omega)$ risultano:



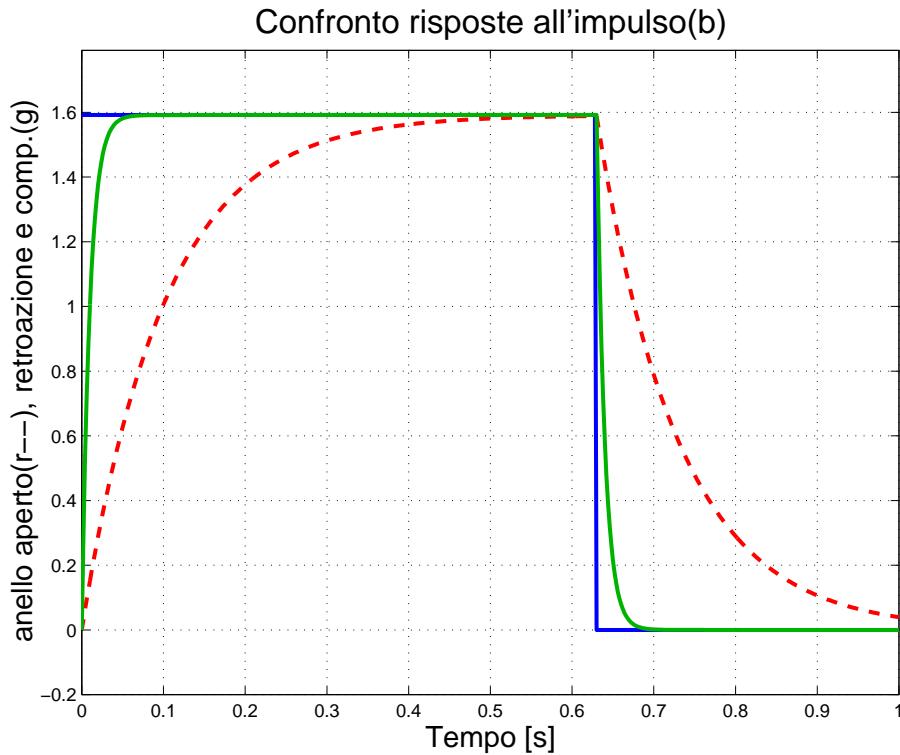
- Con $\omega_H = 10$ e $\omega_{H0} = 100$ i diagrammi delle ampiezze di $G_a(j\omega)$ e $G_0(j\omega)$ risultano:



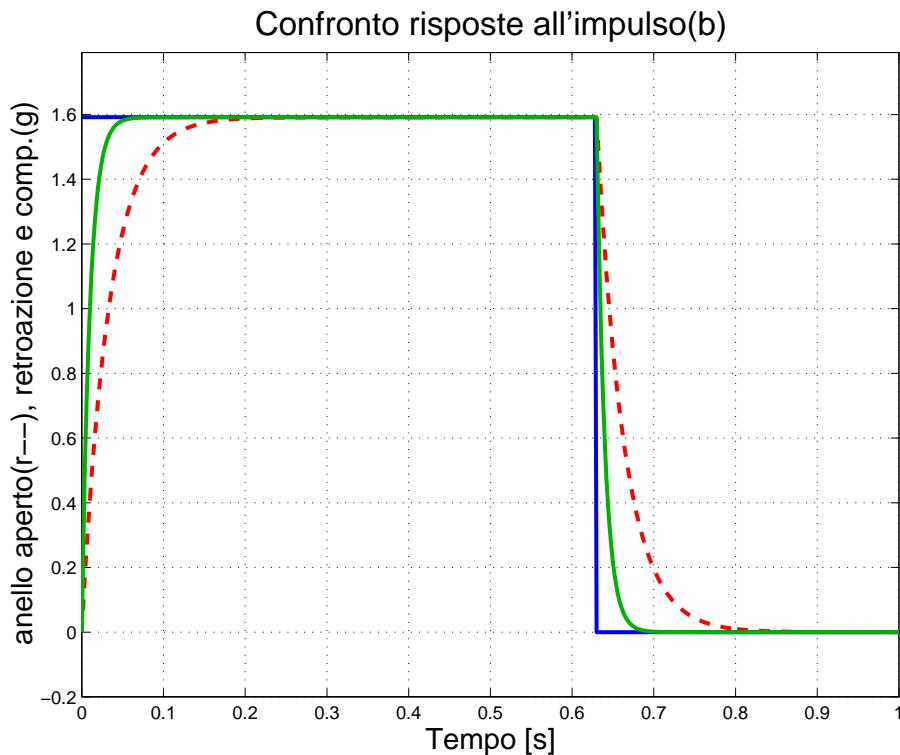
- Con $\omega_H = 30$ e $\omega_{H0} = 100$ i diagrammi delle ampiezze di $G_a(j\omega)$ e $G_0(j\omega)$ risultano:



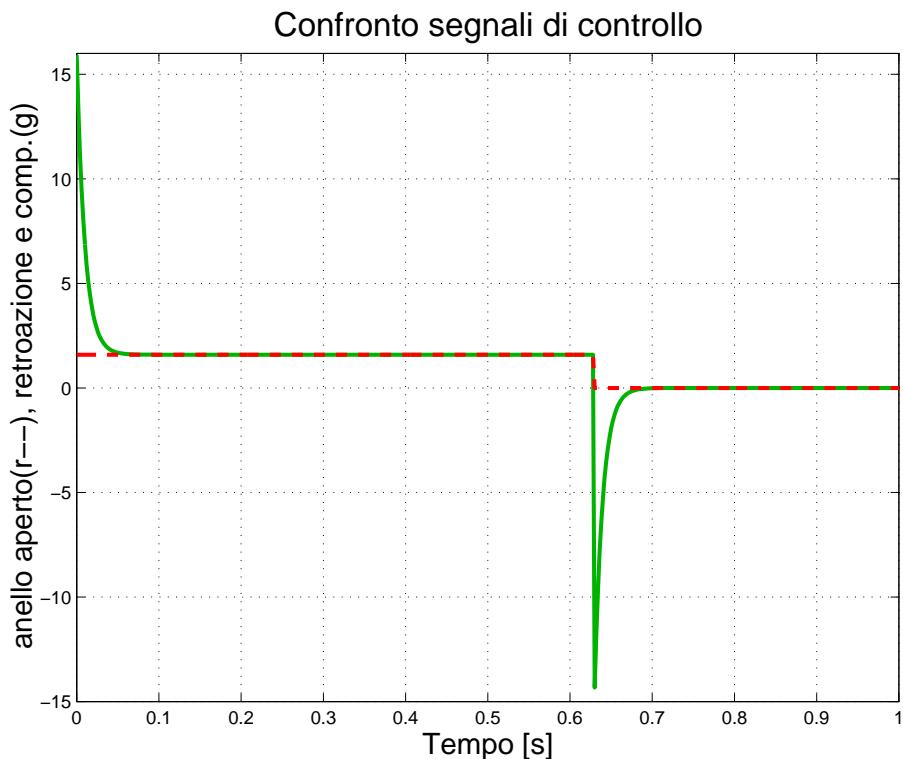
- Con $\omega_H = 10$ e $\omega_{H0} = 100$ le risposte all'impulso rettangolare del sistema $G(s)$ e del sistema retroazionato $G_0(s)$ risultano:



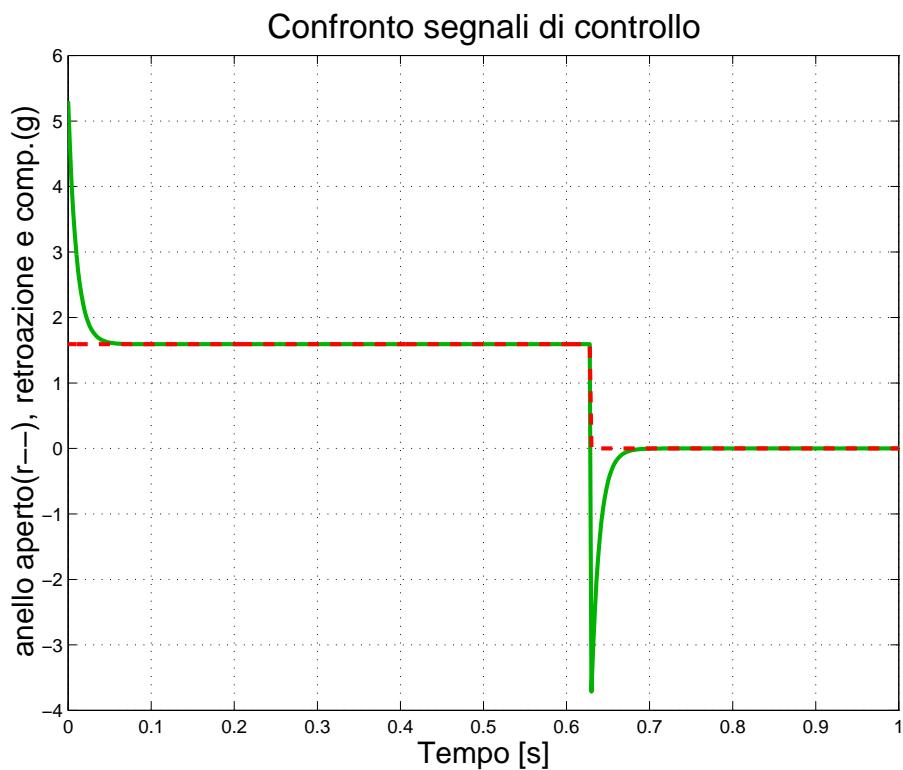
- Con $\omega_H = 30$ e $\omega_{H0} = 100$ le risposte all'impulso rettangolare del sistema $G(s)$ e del sistema retroazionato $G_0(s)$ risultano:



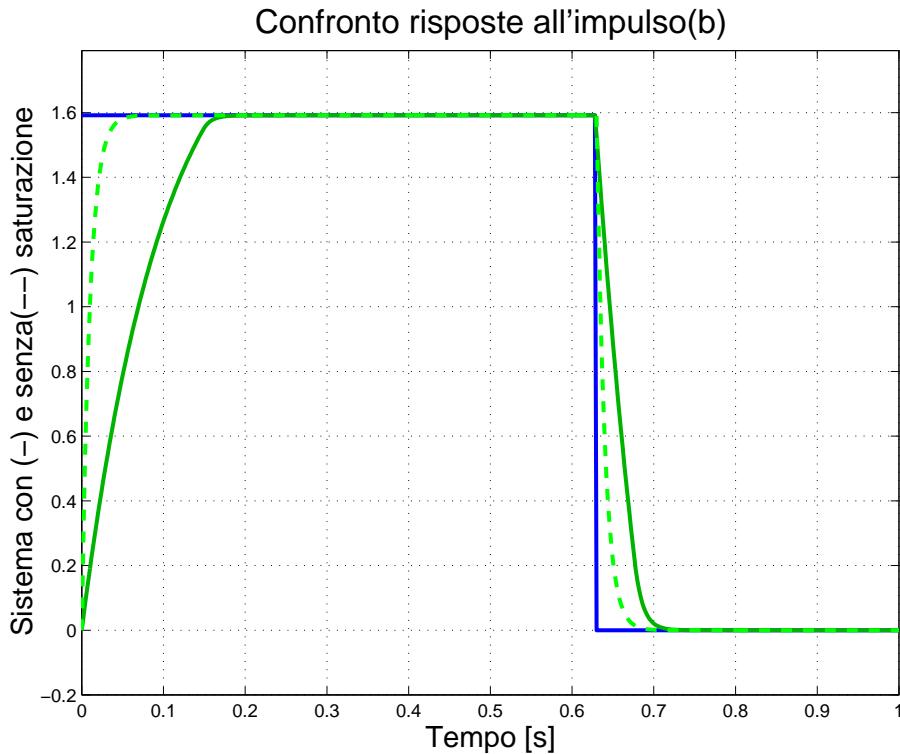
- Con $\omega_H = 10$ e $\omega_{H0} = 100$ gli ingressi al sistema $G(s)$ e al sistema retroazionato $G_0(s)$ risultano:



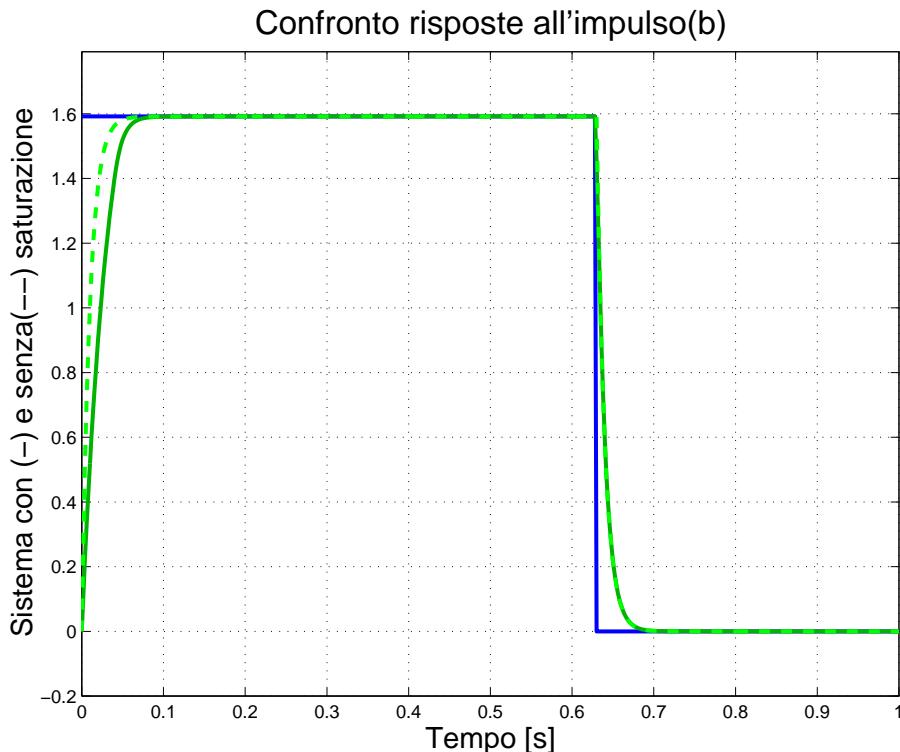
- Con $\omega_H = 30$ e $\omega_{H0} = 100$ gli ingressi al sistema $G(s)$ e al sistema retroazionato $G_0(s)$ risultano (attenzione alla scala verticale!):



- Con $\omega_H = 10$ e $\omega_{H0} = 100$ le risposte all'impulso rettangolare del sistema $G(s)$ e del sistema retroazionato $G_0(s)$ con e senza SATURAZIONE sull'ingresso:



- Con $\omega_H = 30$ e $\omega_{H0} = 100$ le risposte all'impulso rettangolare del sistema $G(s)$ e del sistema retroazionato $G_0(s)$ con e senza SATURAZIONE sull'ingresso:



Banda passante e velocità di risposta

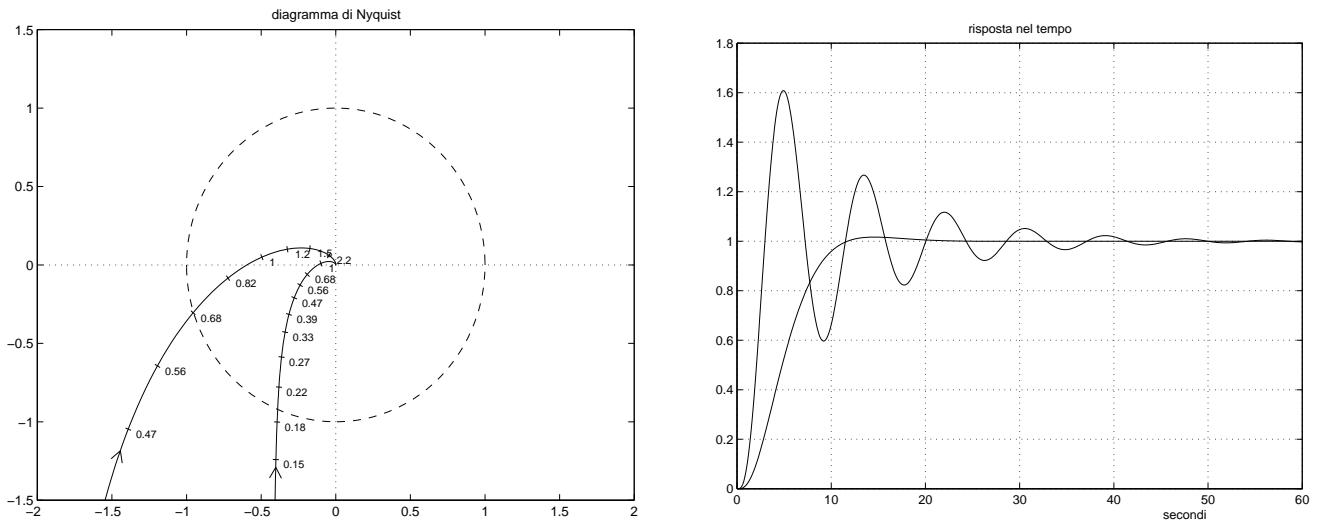
- La larghezza di banda di un sistema è in relazione con i tempi di assestamento e di salita che identificano la velocità di risposta.
- Per un sistema del primo ordine (e per estensione per i sistemi con un polo dominante) il tempo di assestamento e la larghezza di banda sono inversamente proporzionali:

$$G(s) = \frac{\omega_H}{s + \omega_H} \quad T_a = \frac{3}{\omega_H}$$

- Per un sistema del secondo ordine con poli complessi e coniugati (e per estensione per i sistemi con poli complessi e coniugati dominanti), a pari coefficiente di smorzamento, il tempo di assestamento e la larghezza di banda sono inversamente proporzionali:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} \quad \omega_H \simeq \omega_n \quad T_a = \frac{3}{\delta\omega_n}$$

- Qualitativamente il tempo di salita T_s di un sistema di tipo passa basso è inversamente proporzionale alla banda passante.



Quelli riportati in figura sono i diagrammi di Nyquist dei seguenti due sistemi:

$$G_1(s) = \frac{10}{s(s+1)^2(s+10)},$$

$$G_2(s) = \frac{2}{s(s+1)^2(s+10)}$$

A fianco, sono riportati gli andamenti temporali della risposta al gradino dei corrispondenti sistemi in retroazione unitaria. Come si può vedere dai grafici, nei due casi il tempo di salita ($T_{s1} \simeq 1.7$ e $T_{s2} \simeq 7$ s) è “circa” inversamente proporzionale alla larghezza di banda dei due sistemi retrazionati ($\omega_{H01} \simeq 0.68$ e $\omega_{H02} \simeq 0.19$) cioè alle pulsazioni ω_{H0} di intersezione dei diagrammi di Nyquist con il cerchio unitario.