

Fattorizzazione di un polinomio

- Consideriamo polinomi, detti monici, aventi coefficiente unitario per la potenza di grado massimo. È noto che un qualunque polinomio di grado n con coefficienti reali

$$Q(s) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

si annulla in corrispondenza di r valori di s reali (detti radici reali) e di $2c$ valori di s complessi (detti radici complesse).

- Il polinomio $Q(s)$ si può rappresentare come prodotto di fattori $(s - \lambda_k)$ dove λ_k è una radice (reale o complessa) di $Q(s)$ quindi $Q(\lambda_k) = 0$:

$$Q(s) = \prod_{k=1}^n (s - \lambda_k) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_n)$$

- Essendo i coefficienti del polinomio tutti reali, se $\lambda_k = \sigma + j\omega$ è una radice complessa del polinomio, anche il suo complesso coniugato $\lambda_k^* = \sigma - j\omega$ è una radice complessa del polinomio. Le $2c$ radici complesse sono quindi c coppie di numeri complessi coniugati.
- Il fattore $(s - \lambda_k)$ può comparire più volte nella fattorizzazione di $Q(s)$. Il numero di volte in cui il fattore $(s - \lambda_k)$ compare in $Q(s)$ è detto (grado di) molteplicità della radice λ_k .

- Fattorizziamo il polinomio $Q(s)$ in modo che non compaiano coefficienti complessi. Moltiplichiamo quindi fra loro i fattori corrispondenti alle radici complesse e coniugate e separiamo i contributi delle radici reali da quelli delle radici complesse e coniugate.
- Indichiamo con ρ_i per $i = 1 \dots r$ le r radici reali (distinte), con $\sigma_j \pm j\omega_j$ per $j = 1 \dots c$ le c coppie di radici complesse e coniugate (distinte).
- Sia μ_i la molteplicità della radice reale i -esima ρ_i e sia ν_j la molteplicità della j -esima coppia di radici complesse e coniugate $\sigma_j \pm j\omega_j$.
- Tenendo conto della molteplicità delle radici, separando le radici reali da quelle complesse e raggruppando le coppie di radici complesse e coniugate, si ottiene una rappresentazione equivalente del polinomio $Q(s)$:

$$Q(s) = \prod_{i=1}^r (s - \rho_i)^{\mu_i} \prod_{j=1}^c (s^2 - 2\sigma_j s + M_j^2)^{\nu_j}$$

dove $M_j^2 = \sigma_j^2 + \omega_j^2$ è il quadrato del modulo della radice complessa j -esima in quanto:

$$(s - \sigma_j - j\omega_j)(s - \sigma_j + j\omega_j) = (s^2 - 2\sigma_j s + \sigma_j^2 + \omega_j^2) = (s^2 - 2\sigma_j s + M_j^2)$$

Alcuni esempi:

- consideriamo il polinomio di grado 2:

$$Q(s) = s^2 - s - 2$$

le radici si calcolano con la nota formula:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 a c}}{2 a} = \frac{+1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2}$$

quindi le radici sono $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 2$ ciascuna con molteplicità unitaria. In questo caso le due scomposizioni di $Q(s)$ sono identiche:

$$Q(s) = s^2 - s - 2 = (s + 1)(s - 2)$$

- consideriamo il polinomio di grado 3:

$$Q(s) = s^3 - 2s^2 - 10s$$

Una radice è $s = \lambda_0 = 0$ con molteplicità uno. Le rimanenti radici si calcolano come:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 a c}}{2 a} = \frac{+2 \pm \sqrt{-36}}{2} = -1 \pm j3$$

quindi sono radici complesse e coniugate $\lambda_1 = -1 - j3$ e $\lambda_2 = -1 + j3$ ciascuna con molteplicità unitaria. Le due scomposizioni di $Q(s)$ risultano dunque:

$$Q(s) = s^3 - 2s^2 - 10s = s * (s + 1 - j3)(s + 1 + j3)$$

Moltiplicando le due radici complesse:

$$Q(s) = s^3 - 2s^2 - 10s = s * (s^2 - 2s - 10)$$

Scomposizione in Fratti Semplici

- La determinazione dell'evoluzione libera e dell'evoluzione forzata di un sistema lineare stazionario richiedono l'antitrasformazione di una funzione razionale fratta che può essere sempre scritta nella forma:

$$F(s) = K_p \frac{P(s)}{Q(s)} = K_p \frac{s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

- La differenza $n - m$ fra i gradi del denominatore e del numeratore prende il nome di *grado relativo* della funzione razionale fratta $F(s)$.
- Indicando con p_i le n radici (reali o complesse) di $Q(s)$ e con z_i le m radici (reali o complesse) di $P(s)$ si ottiene:

$$F(s) = K_p \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = K_p \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

- Le radici reali o complesse del denominatore $p_1, \dots, p_n$ sono dette *poli* della funzione $F(s)$.
- Le radici reali o complesse del numeratore $z_1, \dots, z_m$ sono dette *zeri* della funzione $F(s)$.
- La costante reale K_p è detta *costante di guadagno nella forma a poli e zeri*.
- La funzione $F(s)$ è univocamente determinata dalla costante K_p , dai poli $p_1, \dots, p_n$ e dagli zeri $z_1, \dots, z_m$.

- Scomponiamo il polinomio $Q(s)$ a denominatore di $F(s)$ secondo la fattorizzazione con soli coefficienti reali:

$$Q(s) = \prod_{i=1}^r (s - \rho_i)^{\mu_i} \prod_{j=1}^c (s^2 - 2\sigma_j s + M_j^2)^{\nu_j}$$

le costanti ρ_i sono poli reali di $F(s)$, mentre i numeri complessi $\sigma_j \pm j\omega_j$ sono poli complessi di $F(s)$.

- Ogni funzione razionale fratta $F(s)$ strettamente propria (cioè con grado relativo $n - m$ almeno pari ad uno) si può scomporre nella somma di *fratti semplici*:

$$F(s) = \sum_{i=1}^r \sum_{h=1}^{\mu_i} \frac{K_{ih}}{(s - \rho_i)^h} + \sum_{j=1}^c \sum_{h=1}^{\nu_j} \frac{\alpha_{jh} s + \beta_{jh}}{(s^2 - 2\sigma_j s + M_j^2)^h}$$

dove i coefficienti reali (da determinare) K_{ih} , α_{jh} , β_{jh} sono detti *residui*.

- I *fratti semplici* sono le funzioni razionali fratte proprie:

$$F_{ih}(s) = \frac{K_{ih}}{(s - \rho_i)^h} \qquad F_{jh}(s) = \frac{\alpha_{jh} s + \beta_{jh}}{(s^2 - 2\sigma_j s + M_j^2)^h}$$

Quindi:

$$F(s) = \sum_{i=1}^r \sum_{h=1}^{\mu_i} F_{ih}(s) + \sum_{j=1}^c \sum_{h=1}^{\nu_j} F_{jh}(s)$$

- L'antitrasformata dei fratti semplici è nota. Sia $f_{ih}(t)$ l'antitrasformata di $F_{ih}(s)$ e sia $f_{jh}(t)$ l'antitrasformata di $F_{jh}(s)$. Per la proprietà di linearità della trasformata di Laplace, l'antitrasformata $f(t)$ di $F(s)$ risulta:

$$f(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{h=1}^{\mu_i} f_{ih}(t) + \sum_{j=1}^c \sum_{h=1}^{\nu_j} f_{jh}(t)$$

- NOTA: la struttura della scomposizione in fratti semplici dipende solo dal denominatore (e quindi dai poli) di $F(s)$. Il numeratore (e quindi gli zeri) di $F(s)$ contribuiscono solo alla determinazione dei residui.

Antitrasformazione dei Fratti Semplici

- Le antitrasformate dei fratti semplici prendono il nome di *modi* della funzione $F(s)$.
- L'antitrasformata dei fratti semplici corrispondenti a poli reali

$$F_{ih}(s) = \frac{K_{ih}}{(s - \rho_i)^h}$$

risulta:

$$f_{ih}(t) = K_{ih} \frac{t^{h-1}}{(h-1)!} e^{\rho_i t}$$

- NOTA: se il polo reale ρ_i è positivo, la sua antitrasformata tende all'infinito per t tendente all'infinito. Se invece $\rho_i < 0$ l'antitrasformata tende a zero per t tendente all'infinito.
- L'antitrasformata dei fratti semplici corrispondenti a coppie di poli complessi e coniugati

$$F_{jh}(s) = \frac{\alpha_{jh} s + \beta_{jh}}{(s^2 - 2\sigma_j s + M_j^2)^h}$$

corrisponde a funzioni del tempo del tipo

$$f_{jh}(t) = c_{jh} t^{h-1} e^{\sigma_j t} \cos(\omega_j t + \varphi_{jh})$$

dove c_{jh} e φ_{jh} sono costanti reali.

- NOTA: se la parte reale σ_j della coppia di poli complessi e coniugati $\sigma_j \pm \omega_j$ è positiva, la sua antitrasformata tende all'infinito per t tendente all'infinito. Se invece $\sigma_j < 0$ l'antitrasformata tende a zero per t tendente all'infinito.

Modi di un sistema

- La risposta libera di un sistema lineare si ottiene antitrasformando una funzione razionale fratta del tipo:

$$Y_0(s) = \frac{c_{n-1} s^{n-1} + \dots + c_1 s + c_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

- La risposta forzata di un sistema lineare si calcola tramite la sua funzione di trasferimento $G(s)$ che è una funzione razionale fratta del tipo:

$$G(s) = \frac{b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

- Il denominatori di $Y_0(s)$ e di $G(s)$ sono esattamente uguali!
- Dato che $Y_0(s)$ e $G(s)$ hanno lo stesso denominatore, la scomposizione in fratti semplici di $Y_0(s)$ e di $G(s)$ ha la stessa struttura, quindi gli stessi modi, cambiamo solo le costanti moltiplicative date dai residui.
- I modi sono quindi una proprietà del sistema e pertanto si può parlare di *modi del sistema*.
- Sia per $Y_0(s)$ che per $G(s)$ i modi del sistema sono le funzioni del tempo corrispondenti alla antitrasformazione di fratti semplici del tipo:

$$f_{ih}(t) = K_{ih} \frac{t^{h-1}}{(h-1)!} e^{\rho_i t}$$

$$f_{jh}(t) = c_{jh} t^{h-1} e^{\sigma_j t} \cos(\omega_j t + \varphi_{jh})$$

dove ρ_i sono i poli reali della funzione di trasferimento e $\sigma_j \pm j \omega_j$ sono le coppie di poli complessi e coniugati.

Requisiti di controllo per i sistemi dinamici

Che cosa si vorrebbe da un sistema dinamico?

Che cosa si vuole ottenere tramite un sistema di controllo?

I seguenti concetti, espressi in modo intuitivo, indicano le principali risposte a queste domande:

1) **Stabilità (semplice)**: un sistema lineare è stabile se e solo se con ingressi nulli e per qualunque condizione iniziale l'uscita rimane limitata.
Un sistema lineare è **instabile** se non è stabile.

2) **Asintotica Stabilità**: un sistema lineare è asintoticamente stabile se e solo se con ingressi nulli e per qualunque condizione iniziale l'uscita tende a zero al tendere del tempo all'infinito.

oppure

un sistema lineare è asintoticamente stabile se e solo se per qualunque ingresso limitato l'uscita rimane limitata.

Ovviamente la stabilità asintotica implica la stabilità semplice. L'asintotica stabilità di un sistema è il requisito di controllo minimo. Tipicamente un sistema di controllo deve anche garantire:

3) **Velocità di risposta**: Si desidera che il sistema controllato risponda ai comandi esterni più velocemente possibile, compatibilmente con i vincoli strutturali o dinamici del sistema.

4) **Precisione**: Si desidera che il sistema controllato risponda ai comandi esterni con la maggiore precisione e accuratezza possibili.

Il comportamento di un sistema dinamico lineare (evoluzione libera ed evoluzione forzata) è completamente descritto da due funzioni razionali fratte (una delle quali è la funzione di trasferimento). Il procedimento di scomposizione in fratti semplici permette quindi di ottenere molte informazioni essenziali sul comportamento dei sistemi dinamici lineari.

Requisiti di controllo e poli del sistema

1) **Stabilità (semplice):** un sistema lineare è stabile se e solo se con ingressi nulli e per qualunque condizione iniziale l'uscita rimane limitata.

- La risposta libera di un sistema lineare si ottiene antitrasformando una funzione razionale fratta del tipo:

$$Y_0(s) = \frac{c_{n-1} s^{n-1} + \dots + c_1 s + c_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

- La condizione iniziale determina i coefficienti $c_1, \dots, c_{n-1}$ e quindi determina solo gli zeri e, di conseguenza, influenza solo i residui K_{ih} , α_{jh} e β_{jh} .
- I modi del sistema sono le funzioni del tempo corrispondenti alla antitrasformazione dei fratti semplici:

$$f_{ih}(t) = K_{ih} \frac{t^{h-1}}{(h-1)!} e^{\rho_i t}$$

$$f_{jh}(t) = c_{jh} t^{h-1} e^{\sigma_j t} \cos(\omega_j t + \varphi_{jh})$$

dove ρ_i sono i poli reali della funzione di trasferimento e $\sigma_j \pm j \omega_j$ sono le coppie di poli complessi e coniugati.

- Un sistema lineare è stabile se e solo se:
 1. la funzione di trasferimento $G(s)$ non ha poli a parte reale positiva;
 2. gli eventuali poli a parte reale nulla (immaginari) hanno molteplicità unitaria.
- Infatti, se ci sono poli a parte reale positiva (quindi almeno un $\rho_i > 0$ o un $\sigma_j > 0$) gli esponenziali nei modi corrispondenti tendono all'infinito per $t \rightarrow \infty$. Se ci sono poli immaginari con molteplicità maggiore di 1, le potenze $t^{(h-1)}$ tendono all'infinito per $t \rightarrow \infty$. I poli immaginari con molteplicità unitaria, determinano funzioni sinusoidali che rimangono limitate, ma non si annullano per $t \rightarrow \infty$.

2) **Asintotica Stabilità:** un sistema lineare è asintoticamente stabile se e solo se con ingressi nulli e per qualunque condizione iniziale l'uscita tende a zero al tendere del tempo all'infinito.

- La risposta libera di un sistema lineare si ottiene antitrasformando una funzione razionale fratta del tipo:

$$Y_0(s) = \frac{c_{n-1} s^{n-1} + \dots + c_1 s + c_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

- La condizione iniziale determina i coefficienti $c_1, \dots, c_{n-1}$ e quindi determina solo gli zeri e, di conseguenza, influenza solo i residui K_{ih} , α_{jh} e β_{jh} .
- I modi del sistema sono le funzioni del tempo corrispondenti alla antitrasformazione dei fratti semplici:

$$f_{ih}(t) = K_{ih} \frac{t^{h-1}}{(h-1)!} e^{\rho_i t}$$

$$f_{jh}(t) = c_{jh} t^{h-1} e^{\sigma_j t} \cos(\omega_j t + \varphi_{jh})$$

dove ρ_i sono i poli reali della funzione di trasferimento e $\sigma_j \pm j \omega_j$ sono le coppie di poli complessi e coniugati.

- **Un sistema lineare è asintoticamente stabile se e solo se la funzione di trasferimento $G(s)$ ha tutti i poli a parte reale strettamente negativa.**
- Infatti, se tutti i poli sono a parte reale strettamente negativa (quindi $\rho_i < 0$ e $\sigma_j < 0$ per qualunque i, j) gli esponenziali nei modi corrispondenti tendono a zero per $t \rightarrow \infty$, qualunque sia la loro molteplicità.

2) **Asintotica Stabilità:** un sistema lineare è asintoticamente stabile se e solo se per qualunque ingresso limitato l'uscita rimane limitata.

- Supponiamo che la trasformata $X(s)$ del segnale di ingresso sia una funzione razionale fratta. A meno di eventuali semplificazioni, la scomposizione in fratti semplici del segnale di uscita $Y(s) = G(s)X(s)$ contiene i fratti semplici dovuti a $G(s)$ insieme ai fratti semplici dovuti a $X(s)$.
- Sei il sistema non è asintoticamente stabile, $G(s)$ ha dei poli a parte reale positiva o nulla. I corrispondenti modi non tendono a zero per $t \rightarrow \infty$. Con una semplice scelta del segnale di ingresso è possibile fare assumere all'uscita valori grandi a piacere (per t sufficientemente grande) anche con segnali di ingresso limitati.
- Esempio: consideriamo il segnale di ingresso $x(t) = \sin(2t)$ e il sistema descritto dalla funzione di trasferimento $G(s)$ con una coppia di poli immaginari $p_{1,2} = \pm 2j$:

$$G(s) = \frac{8}{s^2 + 4} = \frac{8}{(s + j2)(s - j2)}$$

La risposta forzata risulta

$$Y_1(s) = G(s)X(s) = \frac{8}{s^2 + 4} \frac{2}{s^2 + 4} = \frac{16}{(s^2 + 4)^2}$$

La funzione $Y_1(s)$ ha una coppia poli immaginari $p_{1,2} = \pm 2j$ con molteplicità due, quindi la sua antitrasformata $y(t)$ non è limitata per $t \rightarrow \infty$, infatti si calcola che:

$$y(t) = \sin(2t) - 2t \cos(2t)$$

- **NOTA:** Le trasformate $X(s)$ dei segnali di ingresso tipici sono funzioni razionali fratte (es: gradino, rampa, parabola, esponenziali, sinusoidi,...).

3) **Velocità di risposta:** Si desidera che il sistema controllato risponda ai comandi esterni più velocemente possibile, compatibilmente con i vincoli strutturali o dinamici del sistema.

- Consideriamo un sistema asintoticamente stabile e supponiamo che la trasformata $X(s)$ del segnale di ingresso sia una funzione razionale fratta, ad esempio un gradino.
- A meno di eventuali semplificazioni, la scomposizione in fratti semplici del segnale di uscita $Y(s) = G(s)X(s)$ contiene i fratti semplici dovuti a $G(s)$ insieme ai fratti semplici dovuti a $X(s)$.
- Il tempo necessario ai modi di $G(s)$ per portarsi a valori prossimi a zero determina il tempo del *transitorio* cioè il tempo necessario all'uscita $y(t)$ per portarsi al suo andamento a regime.
- I modi di $G(s)$ sono le funzioni del tempo corrispondenti alla antitrasformazione dei fratti semplici:

$$f_{ih}(t) = K_{ih} \frac{t^{h-1}}{(h-1)!} e^{\rho_i t}$$

$$f_{jh}(t) = c_{jh} t^{h-1} e^{\sigma_j t} \cos(\omega_j t + \varphi_{jh})$$

dove ρ_i sono i poli reali della funzione di trasferimento e $\sigma_j \pm j \omega_j$ sono le coppie di poli complessi e coniugati.

- I modi di $G(s)$ tendono a zero tanto più rapidamente quanto più le parti reali dei poli sono negative, cioè tanto più i poli sono a sinistra dell'asse immaginario nel piano complesso.

Esempio 1). Consideriamo il sistema massa-molla-ammortizzatore descritto da:

$$m \ddot{z} + b \dot{z} + K z = u \quad \rightarrow \quad G(s) = \frac{Z(s)}{U(s)} = \frac{1}{m s^2 + b s + K}$$

Fattorizzando $G(s)$ si ottiene

$$G(s) = \frac{Z(s)}{U(s)} = \frac{1}{m} \frac{1}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{b}{m}} = K_p \frac{1}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{b}{m}}$$

I poli di $G(s)$ sono:

$$p_{1,2} = \frac{-b}{2m} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4 m K}}{2m}$$

Confrontiamo due casi. Nel primo caso prendiamo $K = 1$, $m = 1$ e $b = 2$, i poli sono reali e coincidenti: $p_{1,2} = -1$. Nel secondo caso prendiamo massa e attrito maggiori mantenendo inalterata la costante elastica: $K = 1$, $m = 4$ e $b = 4$, i poli sono ancora reali e coincidenti ma più vicini all'asse immaginario: $p_{1,2} = -1/2$. Intuitivamente una massa e un attrito maggiori rallentano il sistema, infatti nel secondo caso la risposta al gradino (vedi figura 1) è più lenta.

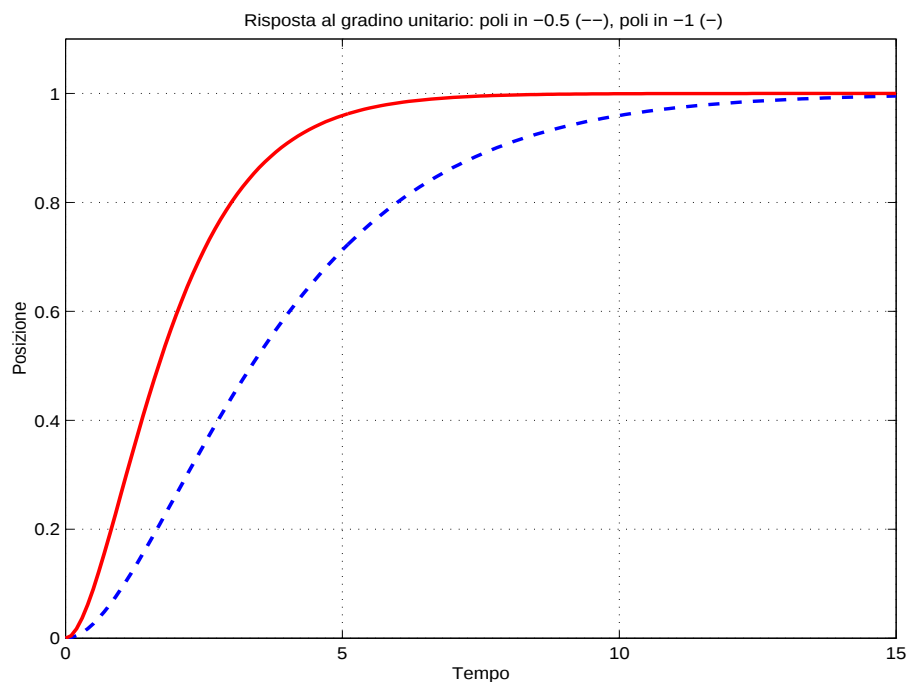


Figura 1: Risposta al gradino unitario: poli in -0.5 (tratti), poli in -1 (continuo).

Esempio 2). Consideriamo un sistema massa-molla-ammortizzatore descritto da:

$$m \ddot{z} + b \dot{z} + K z = u \quad \rightarrow \quad G(s) = \frac{Z(s)}{U(s)} = \frac{1}{m s^2 + b s + K}$$

I poli di $G(s)$ sono:

$$p_{1,2} = \frac{-b}{2m} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4 m K}}{2m}$$

Manteniamo costante la costante elastica $K = 1$ l'attrito $b = 2$ e confrontiamo le risposte a un gradino di forza pari a 1 corrispondenti a $m = 1$ e a $m = 0.2$. Si potrebbe intuire che con una massa più piccola la risposta sia più veloce, ma la simulazione di figura 2 mostra il contrario!

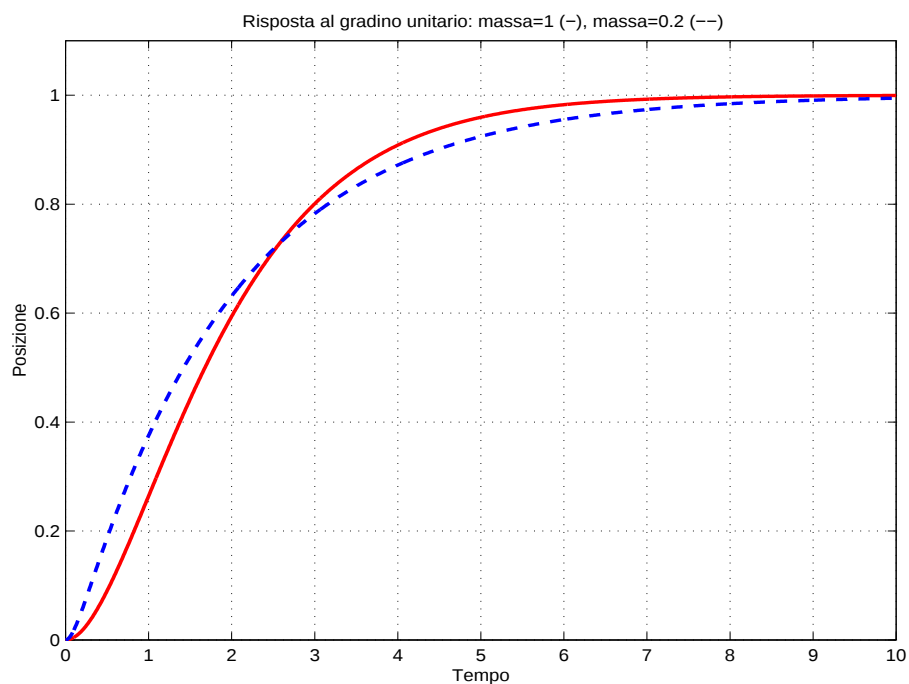


Figura 2: Risposta al gradino unitario: massa $m = 0.2$ (tratti), $m = 1$ (continuo).

Infatti con $m = 1$ i poli del sistema sono reali e coincidenti $p_{1,2} = -1$, mentre con $m = 0.2$ i poli sono in $p_3 = -0.52$ e $p_4 = -9.5$. Il polo $p_3 = -0.52$ è il più vicino all'asse immaginario quindi è quello il cui modo “rallenta” maggiormente il transitorio.