

# **CONTROLLI AUTOMATICI**

## **Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo**

<http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti/ControlliAutomtici.html>

# **IMPLEMENTAZIONE DIGITALE DEI REGOLATORI**

Ing. Luigi Biagiotti

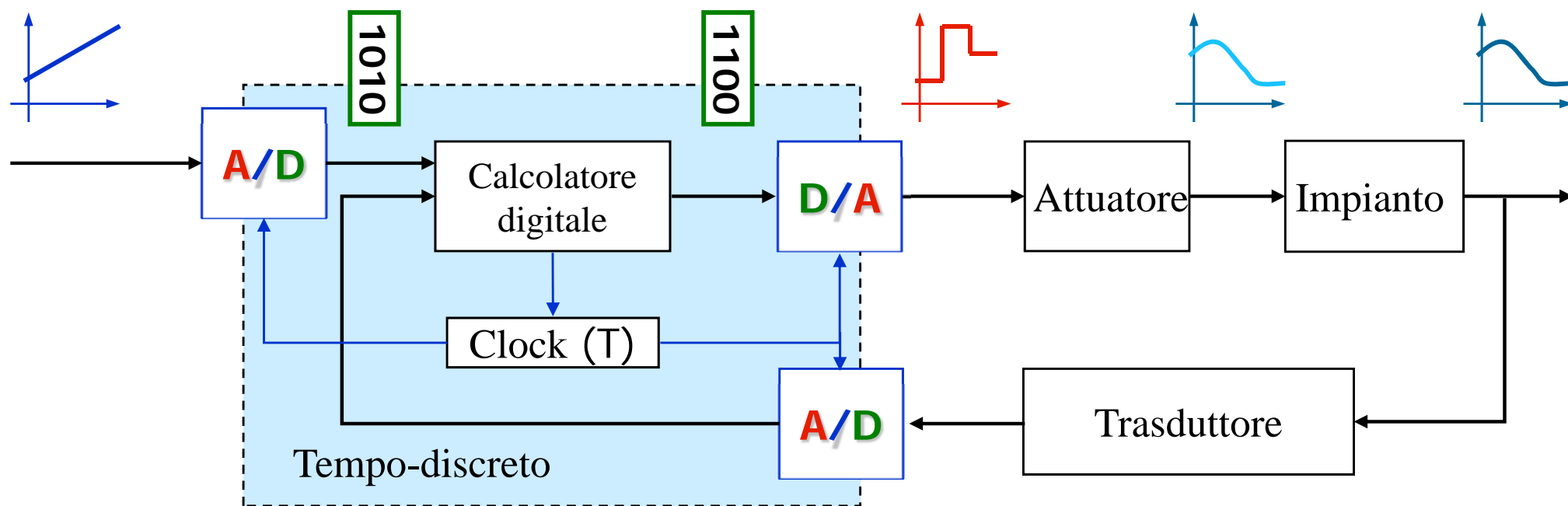
e-mail: [luigi.biagiotti@unimore.it](mailto:luigi.biagiotti@unimore.it)

<http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti>

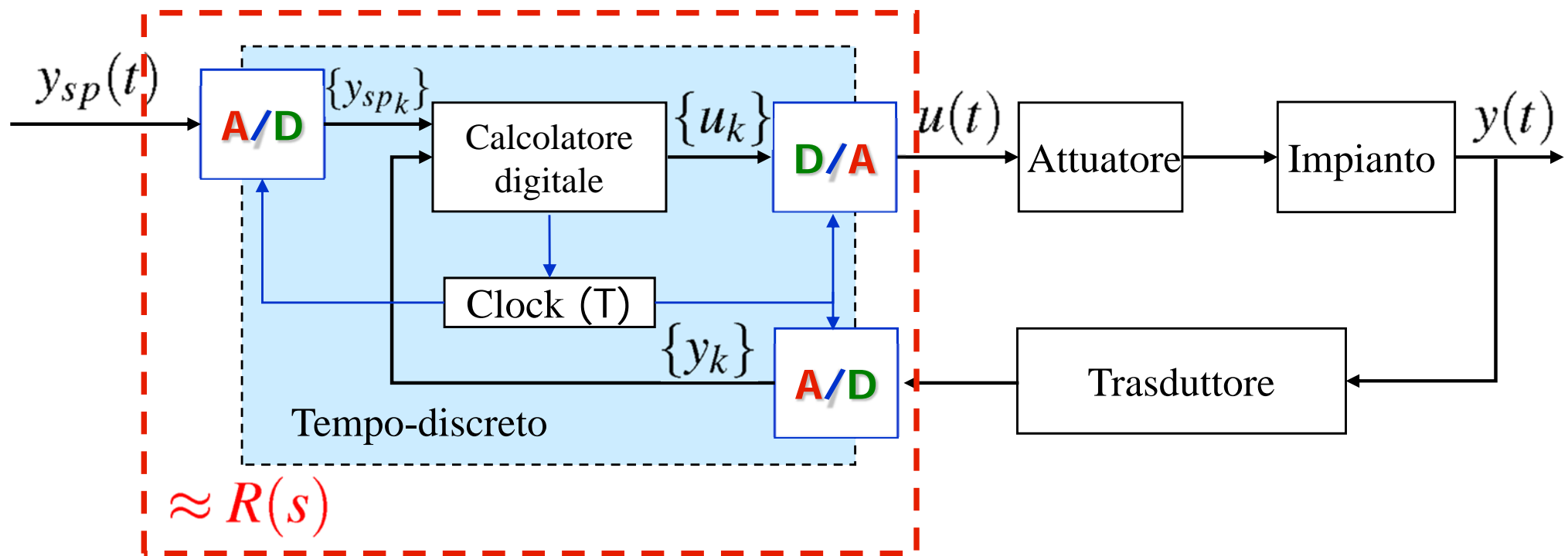


# Sistemi di controllo digitale

- Presenza di un calcolatore nel loop di controllo
- Elaborazione tempo-discreta della legge di controllo
- Occorrono dispositivi di interfaccia
  - tra il dominio tempo-continuo dell'impianto
  - e quello tempo-discreto del regolatore



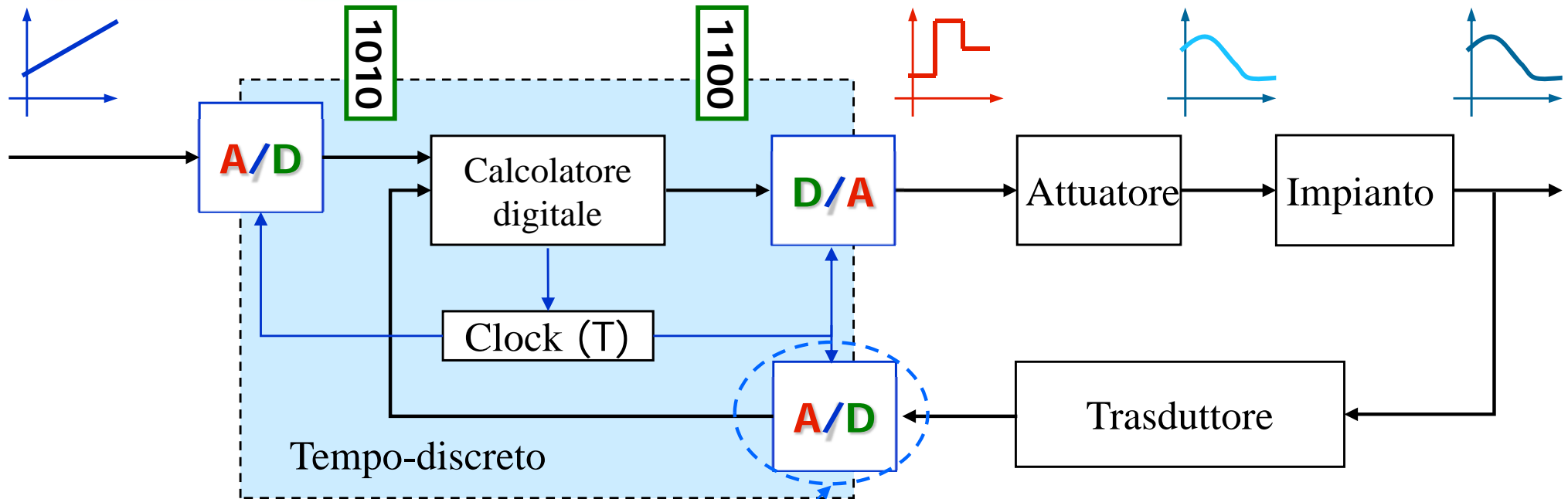
# Regolatore



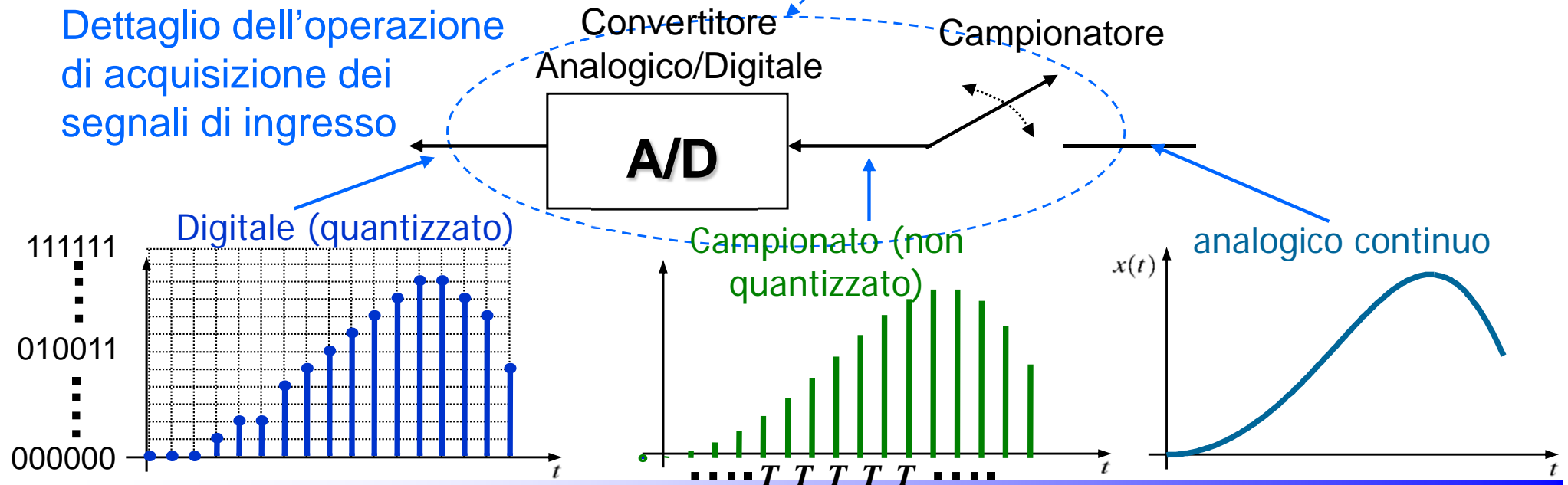
- Il calcolatore digitale dovrà eseguire **un algoritmo che elabora sequenze numeriche** in modo tale che il comportamento del sistema complessivo con ingressi e uscite analogiche sia il più simile possibile a quello che caratterizza la funzione di trasferimento  $R(s)$  progettata nel continuo

➡ **Discretizzazione del regolatore tempo continuo**

# Convertitore A/D

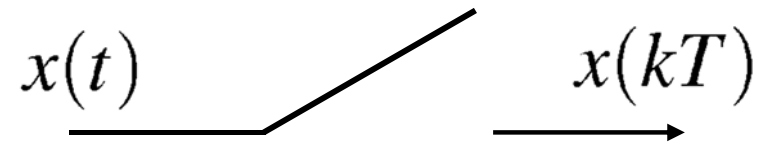


Dettaglio dell'operazione di acquisizione dei segnali di ingresso

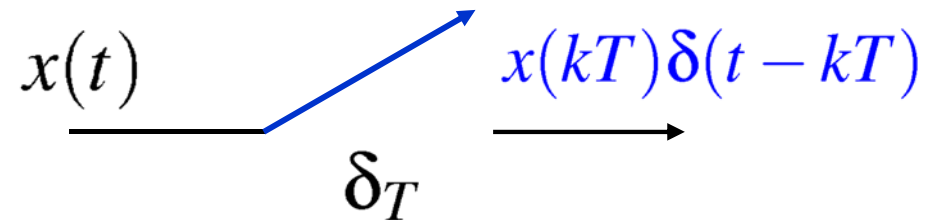


# Convertitore A/D

- Sistema reale:
  - Campiona, con periodo  $T$ , il segnale di ingresso  $x(t)$
  - Restituisce in uscita la sequenza dei valori  $x(kT)$  codificati e quantizzati

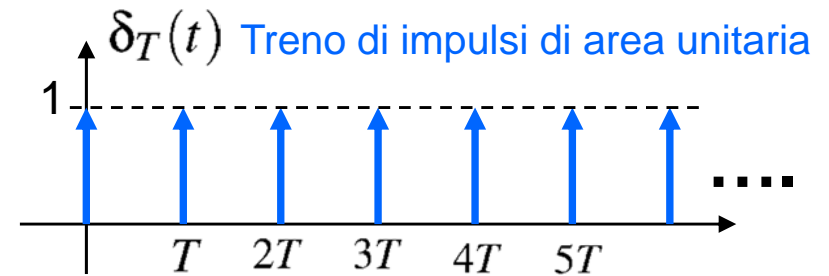


- Modello (Campionatore a impulsi di Dirac):
  - la chiusura dell'interruttore è istantanea
  - in uscita produce un impulso di Dirac di “area” pari a  $x(kT)$



# Campionamento

$$x(t) \xrightarrow{\delta_T} x^*(t) = x(t)\delta_T(t)$$



$$\begin{aligned} x^*(t) &= x(t)\delta_T(t) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t - kT) \end{aligned} \xrightarrow{\text{Laplace}} X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs}$$

- Essendo periodica di periodo  $T$ ,  $\delta_T(t)$  può essere scritta come

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_s t}, \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T} \quad c_n = \frac{1}{T} \int_0^T \delta_T(t) e^{-jn\omega_s t} dt = \frac{1}{T}$$

per cui

$$x^*(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) e^{jn\omega_s t} \xrightarrow{\text{Laplace}} X^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(s - jn\omega_s)$$

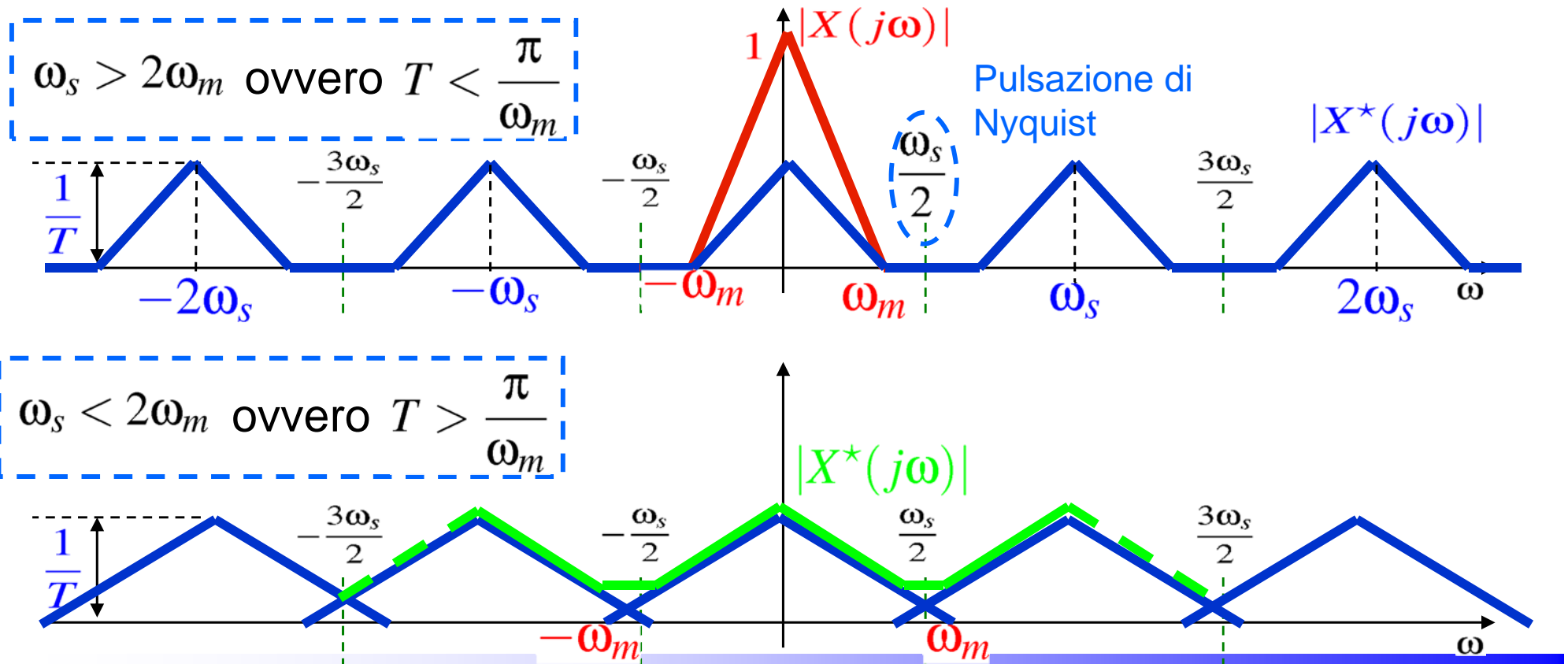
# Spettro dei segnali campionati

- Lo spettro (trasformata di Fourier) del segnale campionato

$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(j\omega - jn\omega_s) \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

è una ripetizione periodica dello spettro del segnale tempo continuo

- Esempio:  $|X(j\omega)|$  a banda limitata ( $|X(j\omega)| = 0$  per  $|\omega| > \omega_m$ )

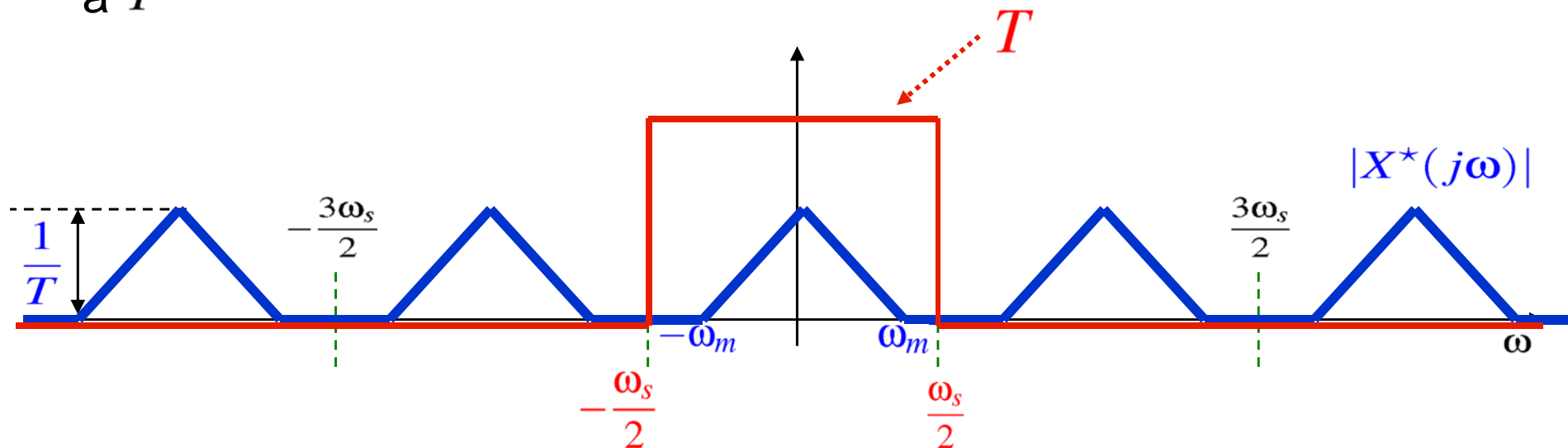


# Segnali campionati: teorema di Shannon

- Assumendo che il segnale tempo continuo abbia una banda limitata  $\omega_m$  è possibile ricostruire il segnale tempo continuo  $x(t)$  a partire dalla sequenza campionata  $\{x(kT)\}$  se risulta

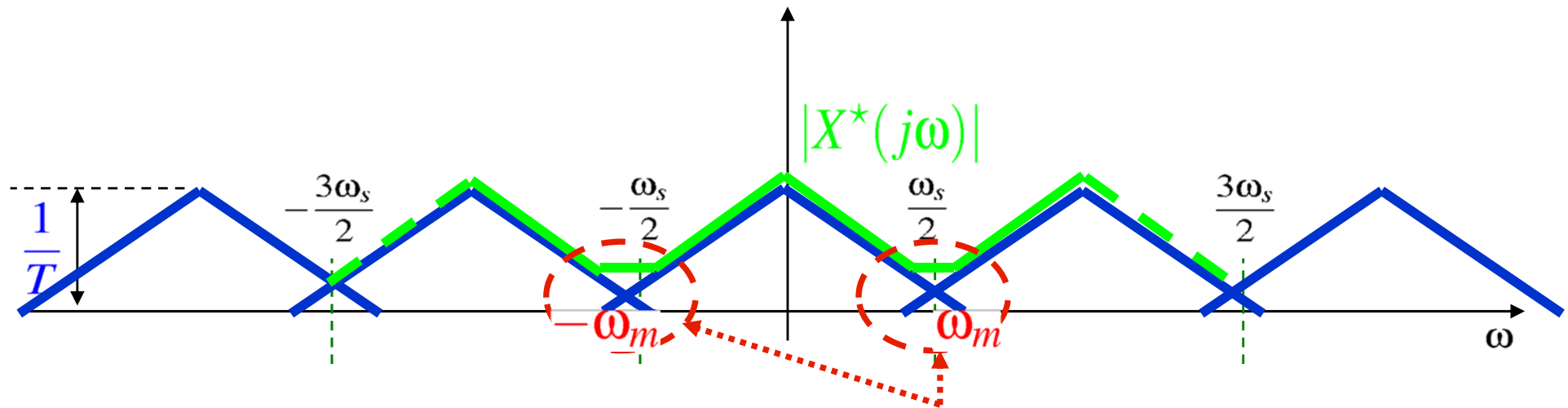
$$\omega_s > 2\omega_m \text{ ovvero } T < \frac{\pi}{\omega_m}$$

- Il ricostruttore ideale del segnale è un filtro passa basso con pulsazione di taglio pari a  $\frac{\omega_s}{2} = \frac{\pi}{T}$  e con amplificazione in banda pari a  $T$



# Aliasing

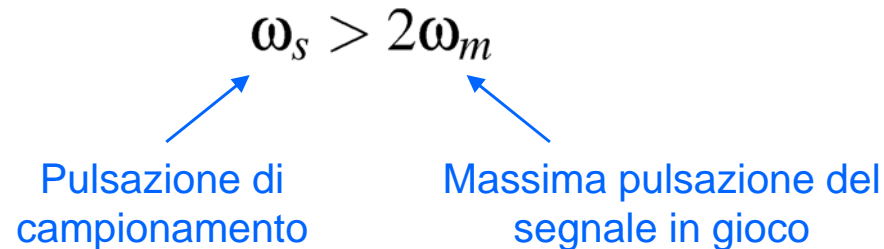
- Nel caso la condizione del teorema di Shannon non sia verificata non è possibile ricostruire il segnale continuo a partire dalla sequenza campionata. Nel dominio delle frequenze questo si evidenzia con una **sovrapposizione delle componenti secondarie con la componente primaria** (che non potrà essere ricostruita con un semplice filtro)



Fenomeno dell'**aliasing**: sovrapposizione frequenziale

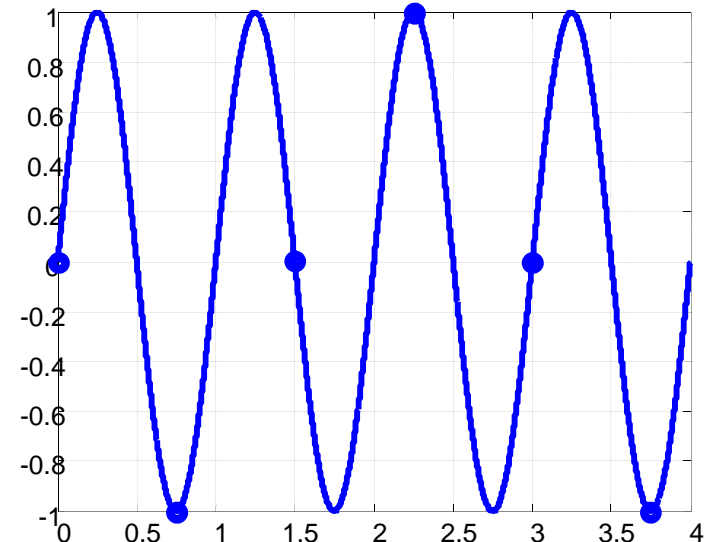
# Segnali campionati: teorema di Shannon

- In base al teorema di Shannon, la funzione continua  $x(t)$  può essere univocamente determinata a partire dalla sequenza dei campioni  $\{x(kT)\}$  se e solo se



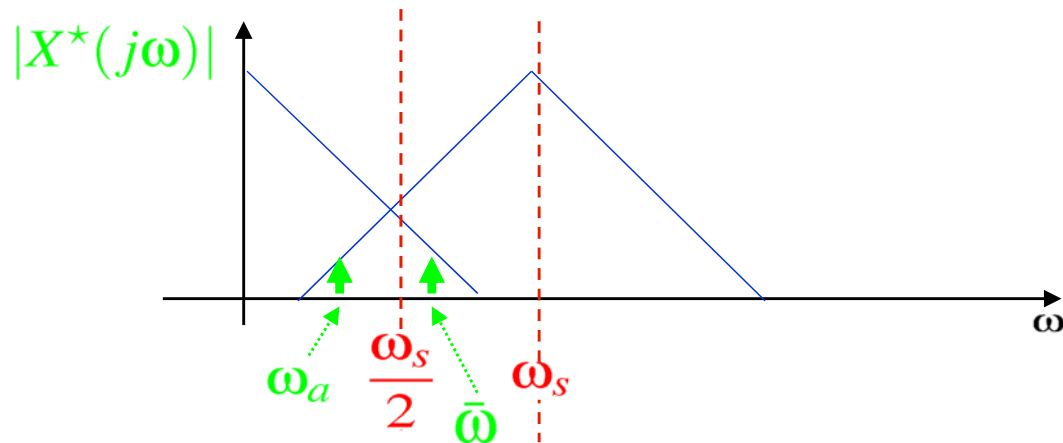
- Con riferimento a semplice segnale sinusoidale con pulsazione  $\bar{\omega}$  questo significa che è possibile ricavare il segnale continuo a partire dai valori campionati solo se il campionamento è avvenuto con  $\omega_s > 2\bar{\omega}$

La sequenza di punti in figura è stata ottenuta campionando il segnale sinusoidale con pulsazione  $\omega_s = 4/3\bar{\omega}$  e non sarà quindi possibile ricostruire il segnale continuo di partenza

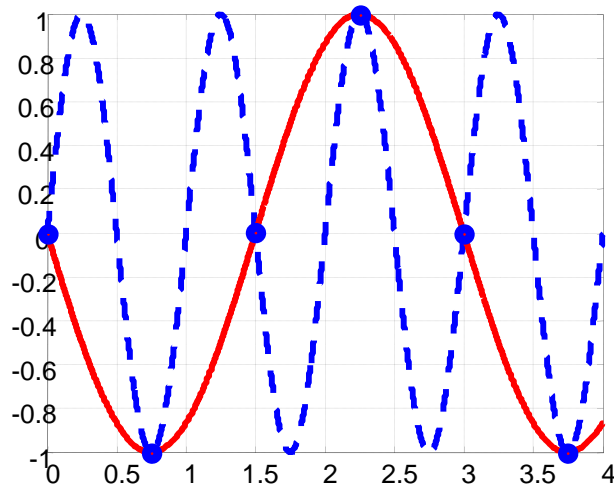


# Segnali campionati: teorema di Shannon

- Poichè pulsazione di Nyquist ( $\omega_n = \omega_s/2$ ) non è superiore alla pulsazione della senoide, si genera un'armonica di "alias" di bassa frequenza, la cui pulsazione è data dalla formula  $\omega_a = \omega_s - \bar{\omega}$



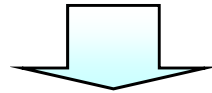
- Nello specifico la pulsazione della senoide di alias vale  $\omega_a = \bar{\omega}/3$



Ricostruendo il segnale continuo dalla sequenza di campioni si otterrebbe proprio la senoide a pulsazione  $\omega_a$

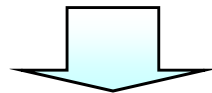
## Scelta del periodo di campionamento

- Sulla base delle considerazioni circa campionamento e ricostruzione segue che affinché i segnali tempo discreti siano una rappresentazione fedele dei corrispondenti tempo continui, occorre scegliere il tempo di campionamento sufficientemente piccolo in relazione alla massima banda dei segnali stessi.



**Problema:** dato un sistema di controllo, stimare la banda massima dei segnali in gioco nel sistema controllato (“closed loop”)

- Dallo studio della funzione di sensitività complementare si è dedotto che una stima della banda dei segnali in gioco in un sistema in retroazione è data da  $\omega_c$  (pulsazione di attraversamento del guadagno d’anello)

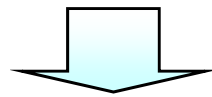


**Teoricamente dal teorema di Shannon**

$$\omega_s > 2\omega_c \quad \text{ovvero} \quad T < \frac{\pi}{\omega_c}$$

# Scelta del periodo di campionamento

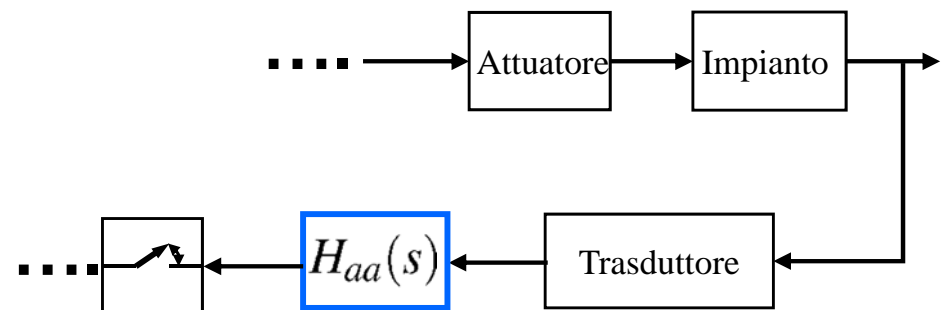
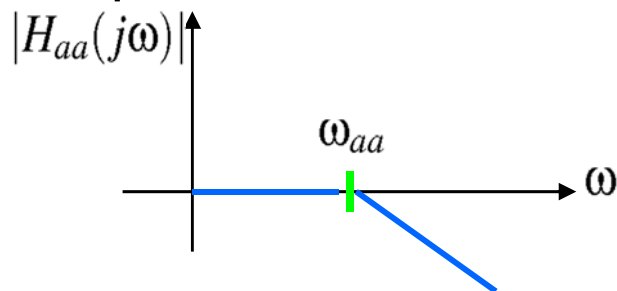
- Problema: i segnali in gioco non avranno, in pratica, banda limitata (avranno cioè componenti spettrali non nulle anche a pulsazione  $\omega > \omega_c$ ). Il periodo di campionamento  $T$  dovrebbe essere scelto in maniera appropriata



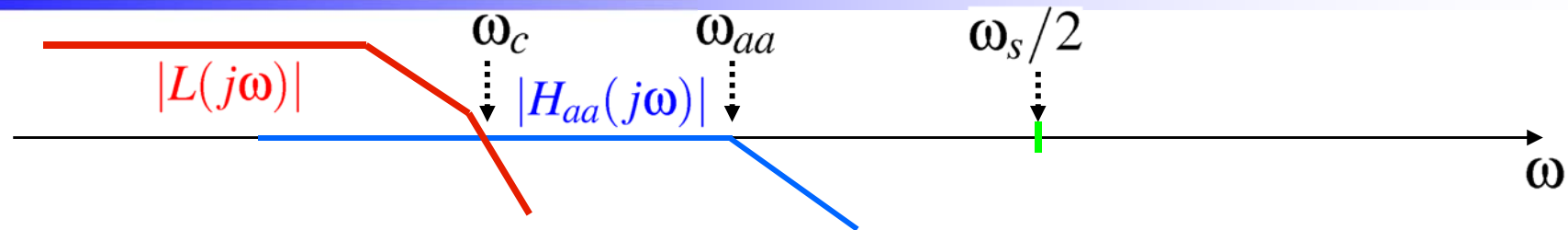
**Regola pratica:**  $\alpha \omega_c \leq \omega_s \leq 10 \alpha \omega_c$  con  $5 \leq \alpha \leq 10$

$$\frac{2\pi}{10 \alpha \omega_c} \leq T \leq \frac{2\pi}{\alpha \omega_c}$$

- Inoltre le componenti spettrali a pulsazione  $\omega > \omega_c$  possono essere ridotte con l'aggiunta di un filtro passa basso  $H_{aa}(s)$  (filtro anti-aliasing) nel ramo di retroazione (prima del campionamento) con una banda passante  $\omega_c < \omega_{aa} < \omega_s/2$

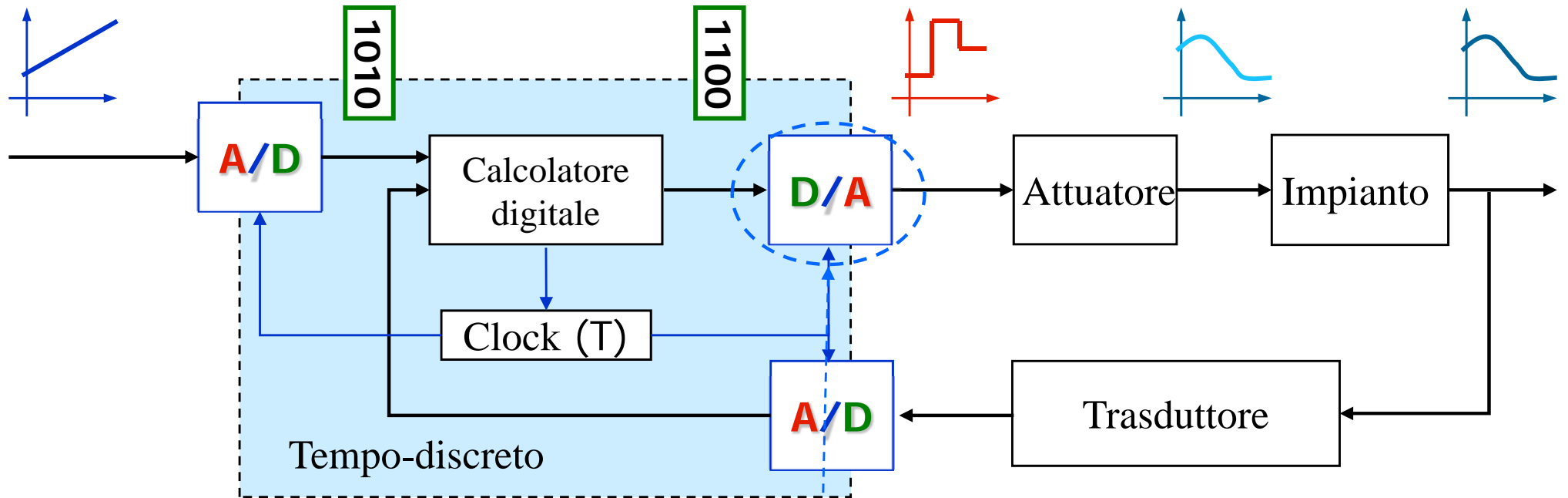


# Filtro anti-aliasing

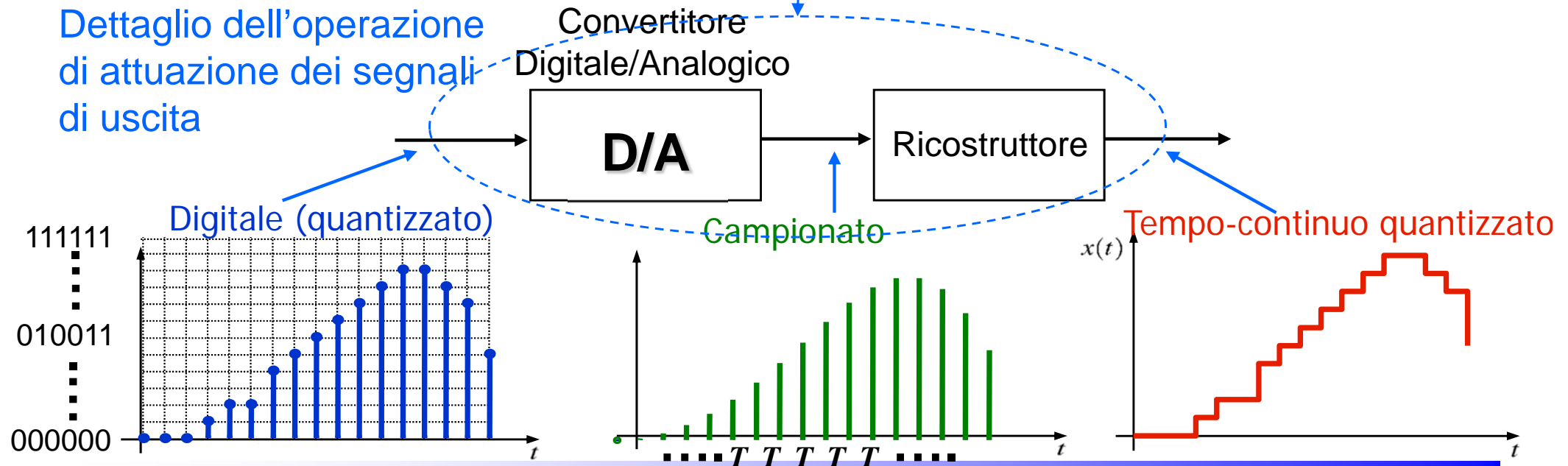


- La banda passante del filtro anti-aliasing deve essere scelta in base a due criteri contrastanti:
  - 1) Sufficientemente “lontana” dalla pulsazione  $\omega_c$  al fine di non alterare in maniera significativa il guadagno ad anello aperto per le pulsazioni  $\omega \leq \omega_c$  (in ogni caso bisogna considerare che i filtri anti-aliasing introducono uno sfasamento negativo anche a pulsazioni inferiori a  $\omega_{aa}$  )
  - 2) Sufficientemente vicina alla pulsazione  $\omega_c$  al fine di garantire la massima attenuazione alle pulsazione di Nyquist  $\omega \geq \omega_s/2$  (per poter garantire la funzione anti-aliasing)
- Note: in base al criterio 1) il filtro anti-aliasing può essere progettato a valle del progetto del regolatore in quanto non ha effetti significativi in banda

# Convertitore D/A



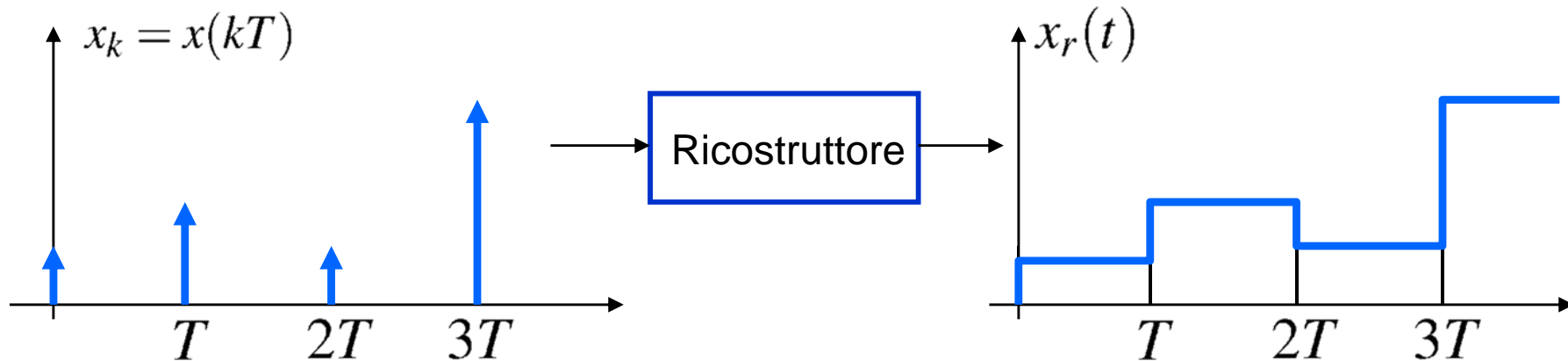
Dettaglio dell'operazione di attuazione dei segnali di uscita



# Ricostruttore di ordine zero

- Fornisce un segnale analogico a partire dalla sequenza di campioni in ingresso.
- Il ricostruttore ideale sarebbe un filtro passa basso ideale
- Praticamente nella maggioranza dei casi si utilizza un ricostruttore di ordine zero (Zero Order Hold):
  - Produce l'uscita (ricostruita):

$$x_r(t) = x(kT) \quad kT \leq t < (k+1)T$$



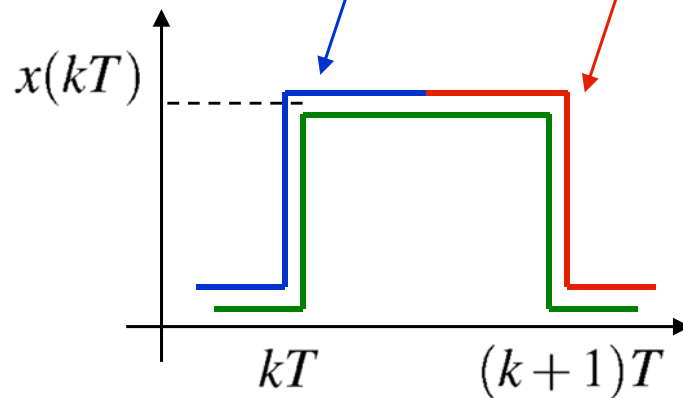
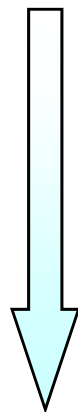
# Campionamento e ricostruzione di segnali

- Nel caso si modelli il campionamento come impulsivo si può determinare la funzione di trasferimento del ricostruttore



$$x_r(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) [h(t - kT) - h(t - (k+1)T)]$$

Trasformata di Laplace



$$X_r(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \frac{e^{-kTs} - e^{-(k+1)Ts}}{s} = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-kTs}$$

# Effetto del ricostruttore

$$H_0(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

- La funzione di trasferimento del ricostruttore può essere approssimata con

$$H_0(s) \approx \frac{T}{\frac{T}{2}s + 1} \quad \text{Approssimazione di Padè}$$

oppure

$$H_0(s) \approx T e^{-s\frac{T}{2}}$$

- Il fatto stesso di realizzare il regolatore in tecnologia digitale con campionatori e mantentori introduce il **ritardo intrinseco di conversione** (pari a metà del periodo di campionamento). E' bene quindi che il regolatore  $R(s)$  progettato a tempo continuo sia dotato di **un'eccedenza di margine di fase** tale da coprire gli sfasamenti introdotti dalla realizzazione digitale.
- Esempio: se si assume  $\omega_s = 10\omega_c$  si deve prendere un'eccedenza di margine di fase pari a

$$\varphi = \left( \frac{T}{2} \omega_c \right) \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{T}{2} \frac{\omega_s}{10} \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{T}{2} \frac{2\pi}{10T} \frac{180^\circ}{\pi} = 18^\circ$$

## Criteri per la scelta del tempo di campionamento

---

- Tempo di campionamento sufficientemente basso:
  - Shannon (banda del sistema in retroazione)
  - Progetto del filtro anti-aliasing meno critico (maggiore campo di frequenze utile  $[\omega_c, \omega_s/2]$  per posizionare la pulsazione di rottura  $\omega_{aa}$ )
  - Effetto del ricostruttore meno critico (ritardo equivalente pari a  $T/2$ )
- ...ma non troppo:
  - Costo dei dispositivi
  - Tempo di calcolo dell'azione di controllo

## La Z-trasformata

- La trasformata  $Z$  si applica ad una sequenza di numeri (reali o complessi) e risulta una funzione complessa di variabile complessa definita come

$$\{x_k\}_0^\infty \xrightarrow{Z} X(z) = Z[\{x_k\}] = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k}$$

La trasformata  $Z$  risulta definita per ogni  $z$  appartenente ad un cerchio il cui raggio dipende dalla sequenza  $\{x_k\}_0^\infty$  (dominio di convergenza)

- Sotto ipotesi (non restrittive) la trasformata risulta univoca ed è possibile definire la trasformazione inversa

$$x_k = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{k-1} dz \xleftarrow{Z^{-1}} X(z)$$

dove l'integrale è calcolato su un qualunque cerchio all'interno del dominio di convergenza

## Alcune proprietà della Z-trasformata

- **Linearità:** se  $F(z) = \mathcal{Z}[\{f_k\}]$  e  $G(z) = \mathcal{Z}[\{g_k\}]$  allora  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{Z}[\alpha \{f_k\} + \beta \{g_k\}] = \alpha F(z) + \beta G(z)$$

- **Ritardo:** se  $F(z) = \mathcal{Z}[\{f_k\}]$  allora la trasformata Z della sequenza ritardata  $\{r_k\}_0^\infty = \{f_{k-1}\}_0^\infty$  ( $f_{-1} = 0$ ) risulta

$$\mathcal{Z}[\{r_k\}] = z^{-1} F(z)$$

- **Anticipo:** se  $F(z) = \mathcal{Z}[\{f_k\}]$  allora la trasformata Z della sequenza anticipata  $\{r_k\}_0^\infty = \{f_{k+1}\}_0^\infty$  risulta

$$\mathcal{Z}[\{r_k\}] = zF(z) - zf_0$$

# Legame tra L-trasformata e Z-trasformata

$$\begin{array}{ccc} x(t) & \nearrow & x(kT)\delta(t-kT) \\ & \delta_T & \longrightarrow \end{array}$$

- Considerando la trasformata di Laplace del segnale  $x^*(t)$  ottenuto campionato in maniera impulsiva  $x(t)$

$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs}$$

facendo la sostituzione  $z = e^{Ts}$  ( $\iff s = \frac{1}{T} \ln z$ ) si ottiene

$$X^*(s) \Big|_{s=\frac{1}{T} \ln z} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k}} = X(z)$$

Z trasformata della sequenza  $\{x_k\}$   
ottenuta campionando  $x(t)$  con periodo  $T$  :  $\{x_k\} = x(kT)$

Z trasformata come notazione semplificata della Laplace trasformata del segnale campionato

$$X^*(s) \begin{array}{c} \xrightarrow{s = \frac{1}{T} \ln z} \\ \xleftarrow{z = e^{Ts}} \end{array} X(z)$$

# Il regolatore digitale

- Il regolatore digitale elabora in linea la sequenza dei valori ottenuti dal campionamento dell'errore e produce la sequenza di valori da attribuire alla variabile di controllo



- Il regolatore è un **sistema dinamico a tempo discreto lineare tempo invariante**, descritto da un'equazione alle differenze:

$$u_k = -a_1 u_{k-1} - a_2 u_{k-2} - \dots - a_n u_{k-n} + b_0 e_k + b_1 e_{k-1} + \dots + b_m e_{k-m}$$

# Il regolatore digitale

- Come nel caso tempo continuo si può considerare la funzione di trasferimento (discreta) che lega la trasformata dell'ingresso  $E(z)$  e quella dell'uscita  $U(z)$



- Trasformando l'equazione alle differenze

$$U(z) = -a_1 z^{-1} U(z) - \dots - a_n z^{-n} U(z) + b_0 E(z) + b_1 z^{-1} E(z) + \dots + b_m z^{-m} E(z)$$

$$(1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}) U(z) = (b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}) E(z)$$

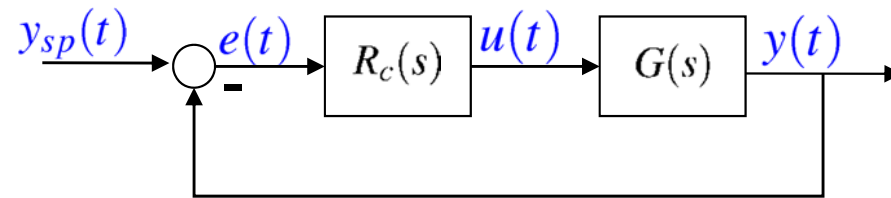
si ricava funzione di trasferimento tempo discreta:

$$R(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} = z^{n-m} \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}$$

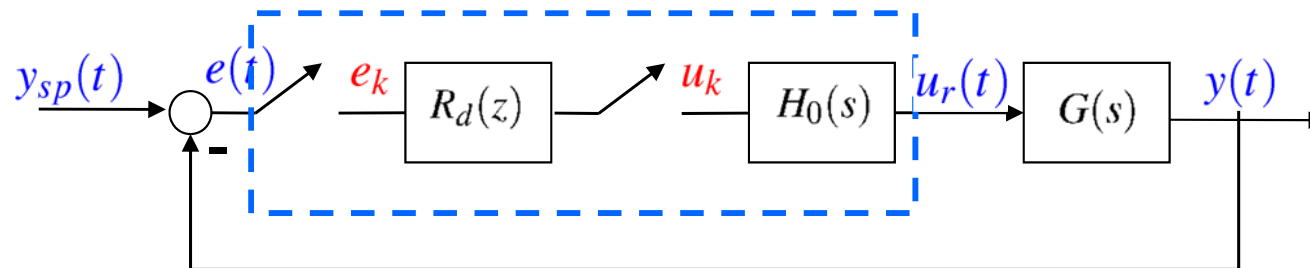
- Il problema consiste nel determinare  $R(z)$

# Realizzazione digitale di un regolatore analogico

- A partire dal controllore tempo continuo  $R_c(s)$  già progettato



si vuole approssimare la relazione tra  $e(t)$  e  $u(t)$  utilizzando un regolatore tempo discreto  $R_d(z)$  con un tempo di campionamento  $T$



- Il regolatore  $R_d(z)$  è ottenuto da  $R_c(s)$  mediante un'operazione di **discretizzazione**. Il ricostruttore (hold) può (/deve) invece essere tenuto in conto nella progettazione di  $R_c(s)$  a causa dello sfasamento (negativo) additivo che esso introduce

# Discretizzazione della legge di controllo

- Dal momento che la funzione di trasferimento non è altro che un formalismo comodo per rappresentare un sistema di equazioni differenziali lineari, segue che i metodi noti per l'**integrazione numerica** delle equazioni differenziali possono tornare utili anche per l'operazione di discretizzazione.
- Se ad esempio si considera l'equazione differenziale

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = ax(t) \quad \longleftrightarrow \quad \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{a}{s+a} = G(s)$$

integrandola tra  $(k-1)T$  e  $kT$  si ottiene

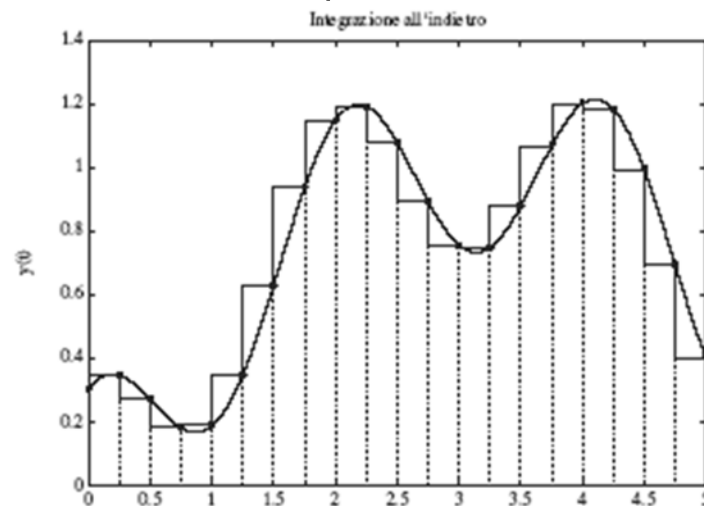
$$\int_{(k-1)T}^{kT} \frac{dy(t)}{dt} dt = -a \int_{(k-1)T}^{kT} y(t) dt + a \int_{(k-1)T}^{kT} x(t) dt$$

quindi

$$y(kT) - y((k-1)T) = -a \int_{(k-1)T}^{kT} y(t) dt + a \int_{(k-1)T}^{kT} x(t) dt$$

# Metodo delle differenze all'indietro

- Per calcolare numericamente gli integrali presenti nella relazione precedente si approssima l'area sottesa alle funzioni  $y(t)$  e  $x(t)$  con rettangoli.
- Nel metodo delle differenze all'indietro si considerano tra gli istanti  $(k-1)T$  e  $kT$  i rettangoli di altezza pari a  $y(kT)$  o  $x(kT)$  (valore finale del periodo considerato).



- Si ha dunque che

$$\int_{(k-1)T}^{kT} y(t) dt \approx T y(kT) \qquad \int_{(k-1)T}^{kT} x(t) dt \approx T x(kT)$$

## Metodo delle differenze all'indietro

- Sostituendo si ottiene

$$y(kT) = y((k-1)T) - aT [y(kT) - x(kT)]$$

- Applicando la trasformata  $Z$

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) - aT [Y(z) - X(z)]$$

ovvero

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = G(z) = \frac{aT}{1 - z^{-1} + aT} = \frac{a}{\frac{1-z^{-1}}{T} + a}$$

- Confrontando  $G(z)$  con  $G(s)$  si ricava

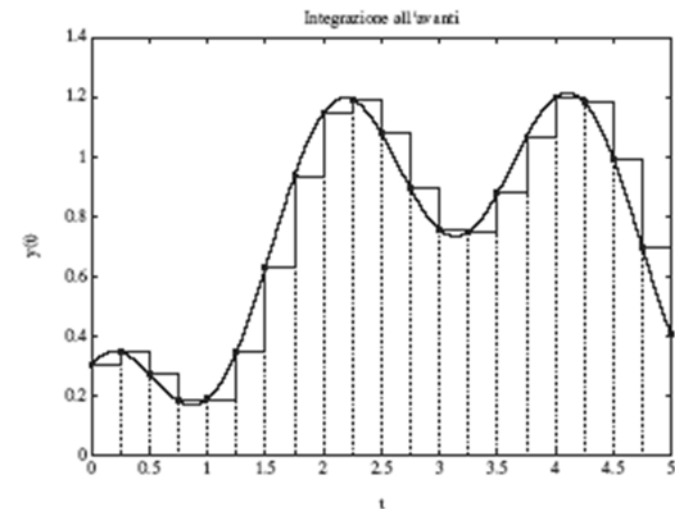
$$G(z) = G(s) \Big|_s = \frac{1 - z^{-1}}{T}$$

# Metodo delle differenze all'avanti

- Approssimando gli integrali come

$$\int_{(k-1)T}^{kT} y(t) dt \approx Ty((k-1)T)$$

$$\int_{(k-1)T}^{kT} x(t) dt \approx Tx((k-1)T)$$



utilizzando gli stessi passaggi visti nel caso delle differenze all'indietro si ottiene

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = G(z) = \frac{aT}{z-1+aT} = \frac{a}{\frac{z-1}{T} + a}$$

da cui

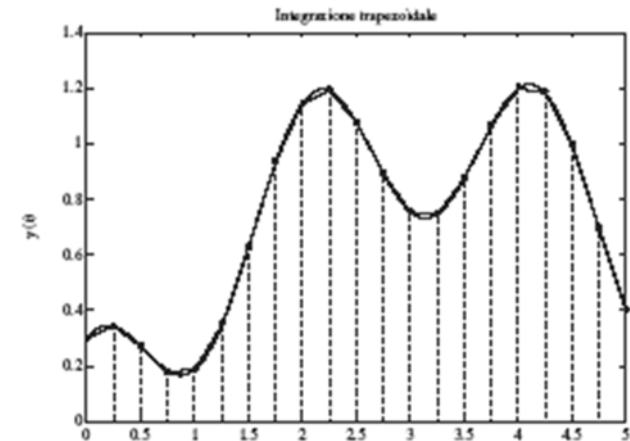
$$G(z) = G(s) \Big|_{s = \frac{z-1}{T}}$$

## Trasformazione bilineare (o di Tustin)

- Approssimando gli integrali come (integrazione trapezoidale)

$$\int_{(k-1)T}^{kT} y(t) dt \approx \frac{[y(kT) + y((k-1)T)]T}{2}$$

$$\int_{(k-1)T}^{kT} x(t) dt \approx \frac{[x(kT) + x((k-1)T)]T}{2}$$



utilizzando gli stessi passaggi visti nel caso delle differenze all'indietro si ottiene

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = G(z) = \frac{\frac{aT}{2}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1}) + \frac{aT}{2}(1+z^{-1})} = \frac{a}{\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + a}$$

da cui

$$G(z) = G(s) \Big|_s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

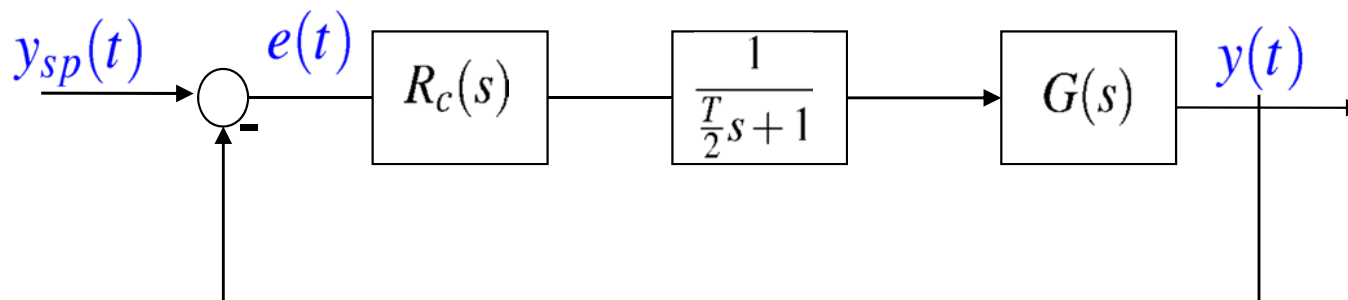
# Riepilogo del progetto per discretizzazione

- Si definisce il periodo di campionamento  $T$
- Si considera gli effetti del campionatore-ricostruttore inserendo nell'anello di controllo il termine

$$\frac{1}{\frac{T}{2}s + 1}$$

Nota: a numeratore non compare la quantità  $T$  del ricostruttore, in quanto compensata dal guadagno  $1/T$  del campionatore

- Si progetta il regolatore continuo  $R_c(s)$



# Riepilogo del progetto per discretizzazione

- Si discretizza il regolatore continuo  $R_c(s)$  con una delle tecniche viste

$$R_d(z) = R_c(s) \Big|_s = \frac{1 - z^{-1}}{T} = \frac{z - 1}{Tz} \quad \text{Differenze all'indietro}$$

$$R_d(z) = R_c(s) \Big|_s = \frac{1 - z^{-1}}{Tz^{-1}} = \frac{z - 1}{T} \quad \text{Differenze all'avanti}$$

Nota: questa tecnica può dar luogo a un sistema a tempo discreto instabile se non si sceglie un tempo di campionamento sufficientemente piccolo.

$$R_d(z) = R_c(s) \Big|_s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} = \frac{2}{T} \frac{z - 1}{z + 1} \quad \text{Tustin}$$

- Si verifica a posteriori il comportamento dinamico del sistema con controllore discreto

## Dal regolatore discreto all'equazione alle differenze

- Data una generica funzione di trasferimento discreta

$$R(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}$$

è immediato ricavare la corrispondente equazione alle differenze, considerando il termine  $z^{-1}$  come l'operatore ritardo unitario

- Dapprima si riscrive  $R$  in funzione di  $z^{-1}$  e sue potenze

$$R(z^{-1}) = \frac{U(z)}{E(z)} = z^{-(n-m)} \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}$$

- A questo punto si scrive

$$U(z) + a_1 z^{-1} U(z) + \dots + a_n z^{-n} U(z) = b_0 z^{-(n-m)} E(z) + b_1 z^{-(n-m+1)} E(z) + \dots + b_m z^{-n} E(z)$$

Ritardo puro ingresso-uscita pari a  $(n-m)$   
periodi di campionamento

da cui segue l'equazione alle differenze finale

$$u_k + a_1 u_{k-1} + \dots + a_n u_{k-n} = b_0 e_{k-n+m} + b_1 e_{k-n+m-1} + \dots + b_m e_{k-n}$$

# Implementazione digitale del regolatore

- Dall'equazione alle differenze

$$u_k + a_1 u_{k-1} + \dots + a_n u_{k-n} = b_0 e_{k-n+m} + b_1 e_{k-n+m-1} + \dots + b_m e_{k-n}$$

si ricava immediatamente la formula per implementare il regolatore su un calcolatore elettronico (che svolgerà tali calcoli ad ogni ciclo di campionamento)

$$u_k = -a_1 u_{k-1} - \dots - a_n u_{k-n} + b_0 e_{k-n+m} + b_1 e_{k-n+m-1} + \dots + b_m e_{k-n}$$

- Se  $n$  è l'ordine del sistema (= numero di poli) segue che l'uscita di controllo ad generico istante  $k$  dipende dal valore che essa assume nei precedenti  $n-1$  istanti e dall'ingresso (variabile errore) nei precedenti  $n-1$  istanti

## PID digitale

- Data la funzione di trasferimento del PID analogico (caso ideale)

$$R_{PID}(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left[ 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right]$$

si può ricavare la corrispondente espressione tempo discreta utilizzando, ad esempio, il metodo delle differenze all'indietro per discretizzare la fdt

$$\begin{aligned} R_{PID}(z^{-1}) &= K_p \left[ 1 + \frac{T}{T_i(1 - z^{-1})} + \frac{T_d}{T}(1 - z^{-1}) \right] \\ &= K_p \frac{(1 - z^{-1}) + T/T_i + T_d/T(1 - z^{-1})^2}{(1 - z^{-1})} \end{aligned}$$

## PID digitale

- Si ricava perciò

$$\frac{U(z)}{E(z)} = K_p \frac{(1 - z^{-1}) + T/T_i + T_d/T(1 - 2z^{-1} + z^{-2})}{(1 - z^{-1})}$$

da cui

$$U(z) - z^{-1}U(z) = K_p \left[ (1 - z^{-1})E(z) + \frac{T}{T_i}E(z) + \frac{T_d}{T}(1 - 2z^{-1} + z^{-2})E(z) \right]$$

- L'equazione alle differenze corrispondente risulta

$$u_k = u_{k-1} + K_p \left[ (e_k - e_{k-1}) + \frac{T}{T_i}e_k + \frac{T_d}{T}(e_k - 2e_{k-1} + e_{k-2}) \right]$$

- **Esercizio:** Provare a discretizzare il regolatore PID con il metodo di Tustin

# Implementazione digitale di un generico regolatore

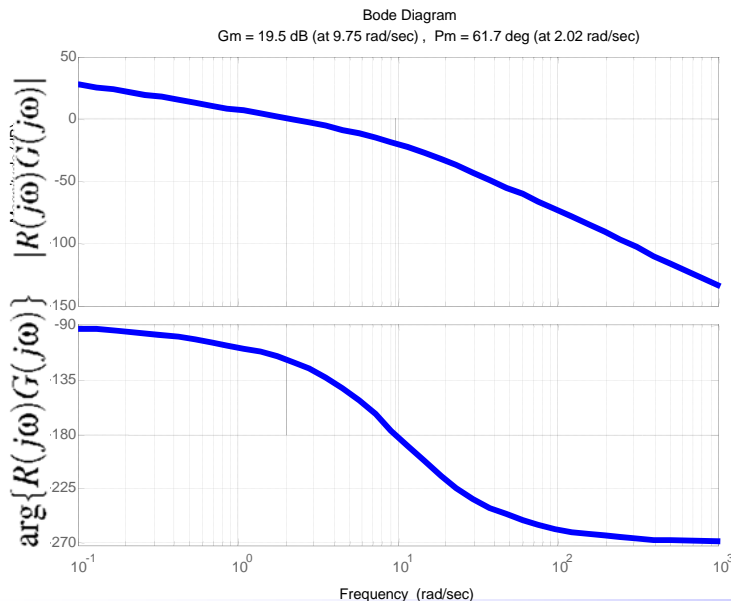
- Esempio. L'impianto

$$G(s) = \frac{25}{s(s+1)(s+10)}$$

controllato in retroazione mediante la rete correttiva (anticipatrice)

$$R_c(s) = \frac{1 + \tau_z s}{1 + \tau_p s} = \frac{1 + 0.8 s}{1 + 0.1 s}$$

è caratterizzato da margine di fase  $M_f \approx 60^\circ$  e pulsazione di attraversamento  $\omega_c \approx 2 \text{ rad/s}$



Dal valore di  $\omega_c$  segue che una pulsazione di campionamento adeguata potrebbe essere

$$\omega_s = 10\omega_c = 20$$



$$T = \frac{2\pi}{\omega_s} = 0.3 \text{ s}$$

# Implementazione digitale di un generico regolatore

- E' possibile discretizzare il regolatore utilizzando i metodi approssimati visti:

- Differenze all'indietro

$$R_{d1}(z) = \frac{1 + \tau_z \frac{1-z^{-1}}{T}}{1 + \tau_p \frac{1-z^{-1}}{T}} = \frac{T + \tau_z - \tau_z z^{-1}}{T + \tau_p - \tau_p z^{-1}}$$

- Trasformazione bilineare (Tustin)

$$R_{d2}(z) = \frac{1 + \tau_z \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}{1 + \tau_p \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{T + 2\tau_z + (T - 2\tau_z)z^{-1}}{T + 2\tau_p + (T - 2\tau_p)z^{-1}}$$

- Con  $T = 0.3 s$  si ottengono rispettivamente

$$R_{d1}(z) = \frac{1.1 - 0.8z^{-1}}{0.4 - 0.1z^{-1}} = \frac{1.1z - 0.8}{0.4z - 0.1}$$

$$R_{d2}(z) = \frac{1.9 - 1.3z^{-1}}{0.5 + 0.1z^{-1}} = \frac{1.9z - 1.3}{0.5z + 0.1}$$

Una funzione di trasferimento discreta può essere definita in Matlab mediante il comando  $G = \text{tf}(\text{Num}, \text{Den}, T)$ , es.

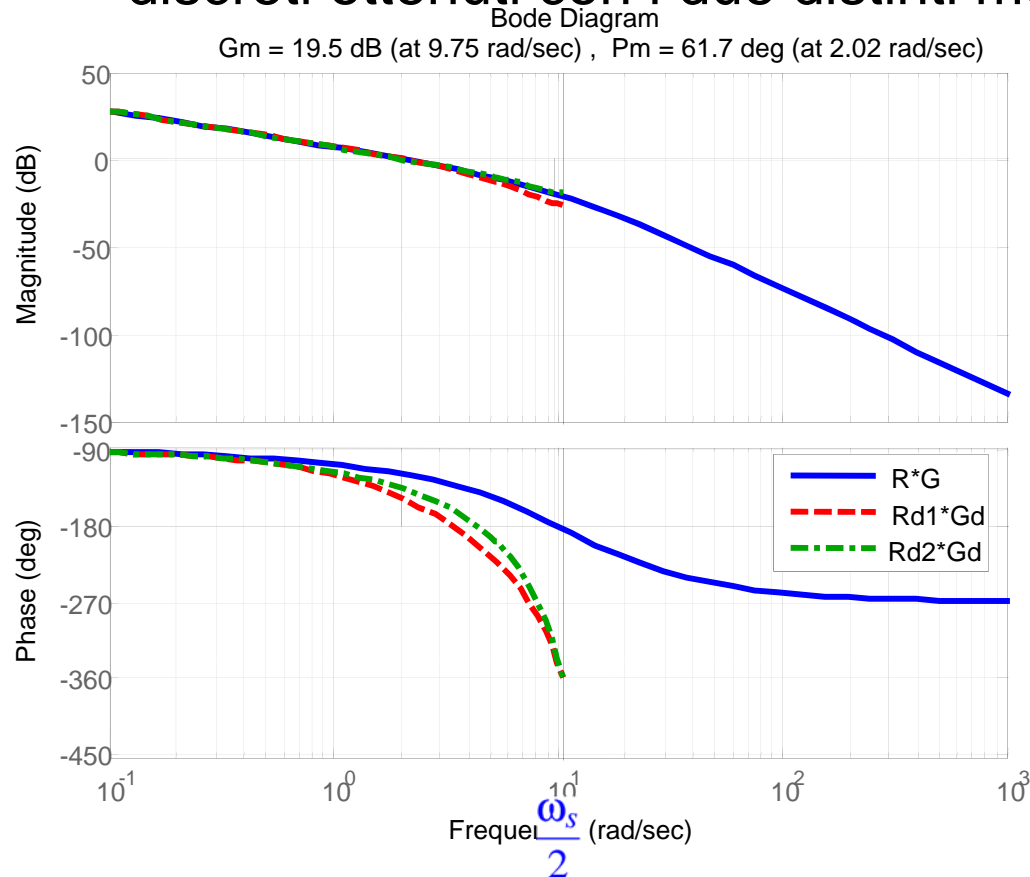
```
>> Rd1 = tf([1.1 -0.8],[0.4 -0.1],T)
```

Esiste in Matlab un comando che effettua automaticamente la discretizzazione di un regolatore tempo continuo con il metodo di Tustin, es.

```
>> Rc = tf([0.8 1],[0.1 1]);  
>> Rd2 = c2d(Rc,T,'tustin');
```

# Implementazione digitale di un generico regolatore

- Viene confrontata la risposta in frequenza del guadagno d'anello del sistema continuo  $L(j\omega) = R_c(j\omega)G(j\omega)$  con quella dei sistemi tempo discreti ottenuti con i due distinti metodi di discretizzazione



La funzione di risposta armonica di una generica fdt tempo discreta è definita come

$$G(e^{j\omega T}) \quad -\frac{\pi}{T} \leq \omega \leq \frac{\pi}{T}$$

$\frac{\omega_s}{2}$

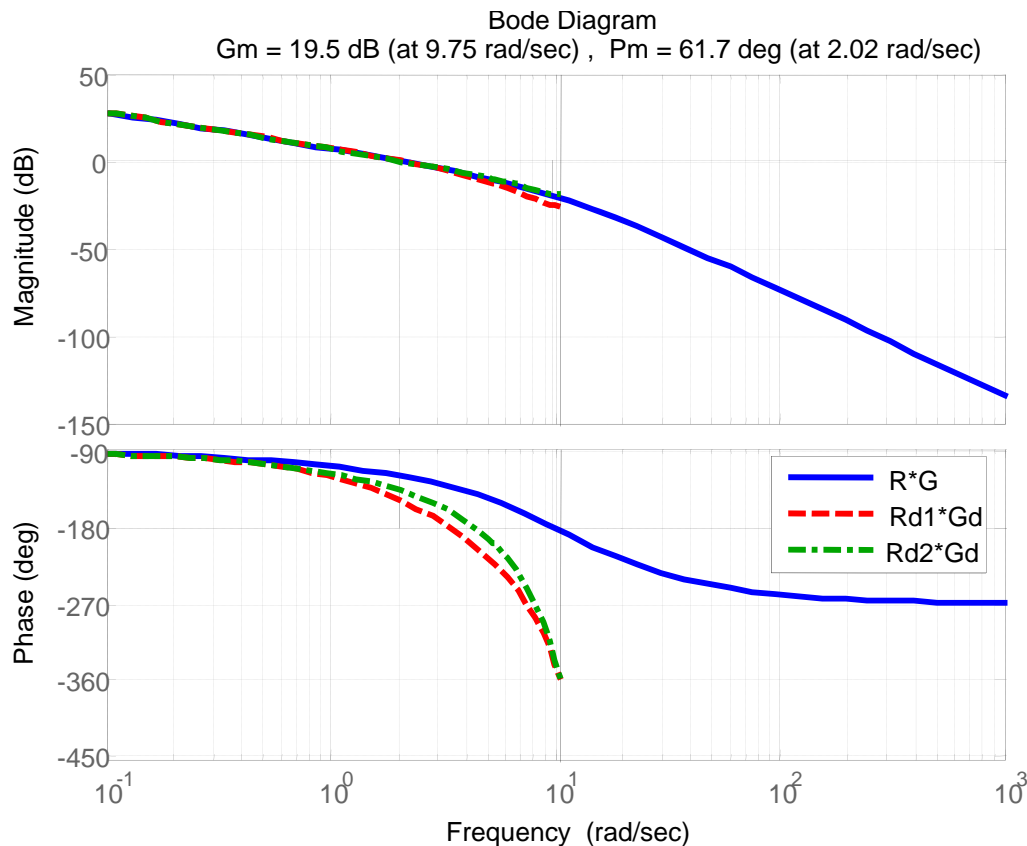
Il comando di matlab `bode` tratta indifferentemente fdt tempo continue e tempo discrete (ma non si possono mischiare)

- Buona approssimazione delle ampiezze, sfasamento consistente nel diagramma degli argomenti (specie a frequenze prossime a quella di Nyquist) → presenza del ricostruttore

# Implementazione digitale di un generico regolatore

- Per plottare i diagrammi di Bode del guadagno di anello di un sistema con regolatore tempo discreto occorre che la  $L_d(z)$  sia espressa in maniera discreta. Si deve perciò trasformare la funzione di trasferimento dell'impianto  $G(s)$  nell'equivalente tempo discreto:

$$G_d(z) = \mathcal{Z}\{G(s)\} = \mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}[G(s)]\Big|_{t=kT}\right\}$$



Poiché l'operazione di campionamento e ricostruzione introduce nel sistema un nuovo elemento dinamico

$$H_0(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

occorre tenerne in conto nella definizione di  $G_d(z)$ , per cui (in realtà)

$$G_d(z) = \mathcal{Z}\{H_0(s)G(s)\}$$

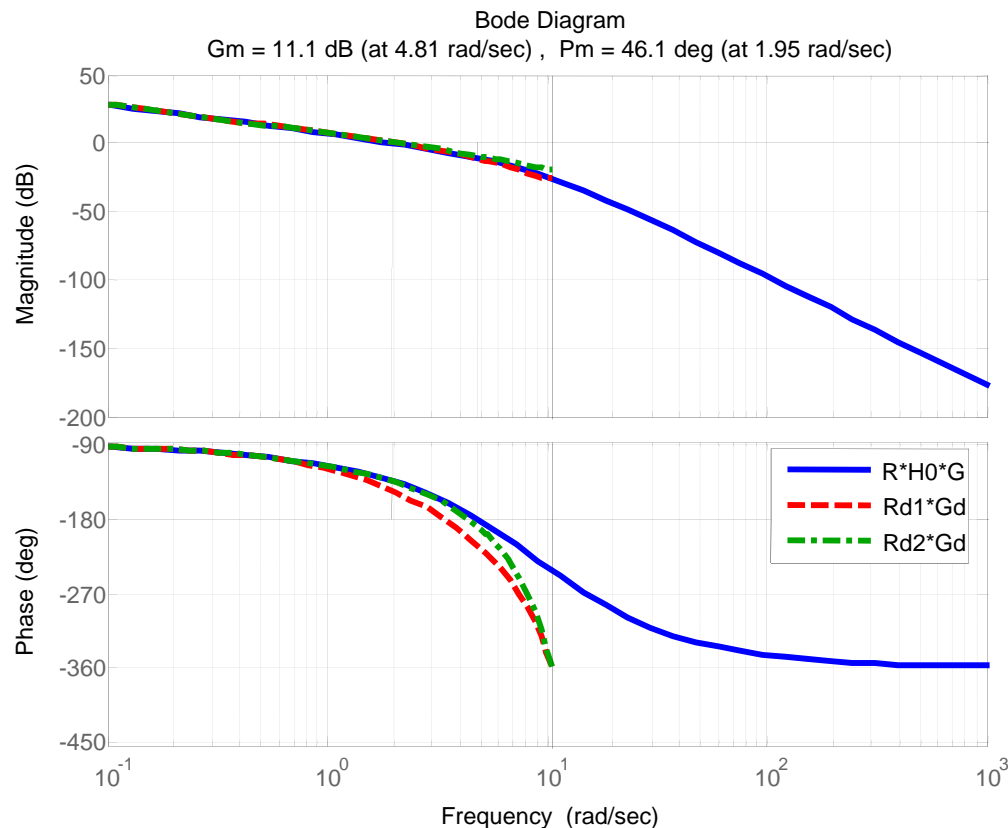
Esiste in Matlab un comando che calcola la  $\mathcal{Z}$  trasformata di una fdt tempo continua  $G$  con l'aggiunta del ricostruttore di ordine zero

```
>> Gd = c2d(G,T,'zoh');
```

# Implementazione digitale di un generico regolatore

- Come visto i diagrammi delle fasi con i regolatori discretizzati differiscono notevolmente da quello del sistema continuo. A rigore, essi andrebbero confrontati con quelli del guadagno di anello in cui è inserito il ricostruttore di ordine zero (che induce uno sfasamento negativo)

$$L(j\omega) = R_c(j\omega)H_0(j\omega)G(j\omega) \text{ con } H_0(s) = \frac{1}{\frac{T}{2}s + 1}$$

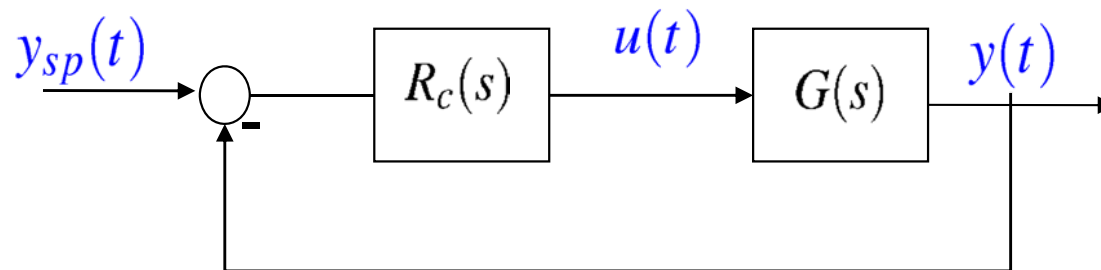


Con il periodo di campionamento scelto riduce il margine di fase di oltre 15°

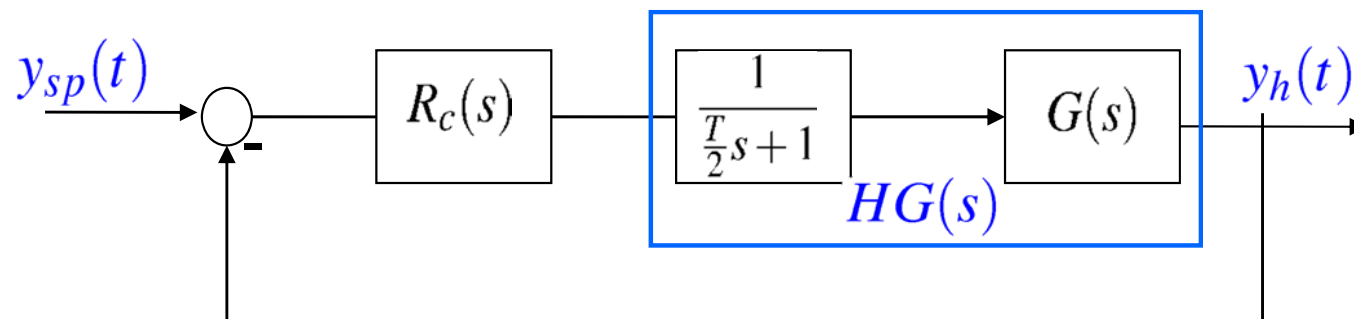
Rispetto al caso continuo, l'approssimazione ottenuta con la trasformazione bilineare risulta migliore rispetto a quella dedotta con il metodo delle differenze all'indietro

# Implementazione digitale di un generico regolatore

- Vengono ora confrontate le risposte del sistema tempo continuo (con e senza ricostruttore) e tempo discreto (si considera la trasformazione bilineare  $\rightarrow R_d(z) = R_{d2}(z)$ ).
- Significato degli schemi di controllo:
  - Sistema tempo continuo ideale



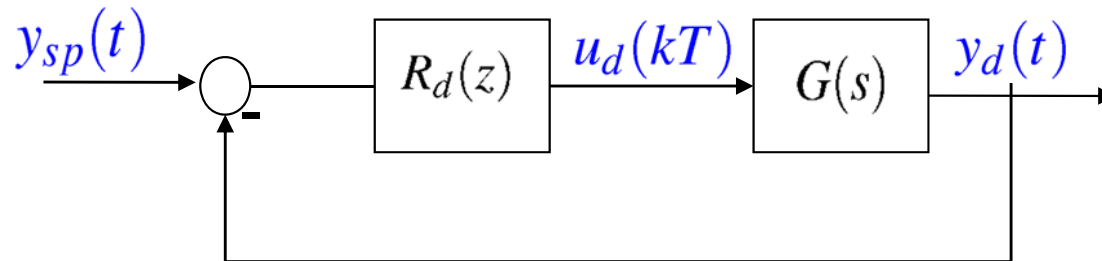
- Sistema tempo continuo con ricostruttore di ordine zero



Sapendo che il regolatore sarà implementato in maniera digitale, occorrerebbe progettarlo considerando come impianto  $HG(s)$

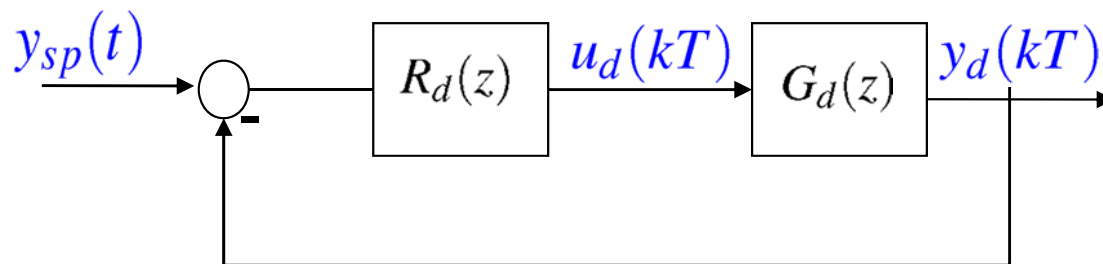
# Implementazione digitale di un generico regolatore

- Significato degli schemi di controllo:
  - Regolatore tempo discreto che controlla il sistema continuo



Il ricostruttore è inserito implicitamente

- Regolatore tempo discreto e funzione di trasferimento discreta

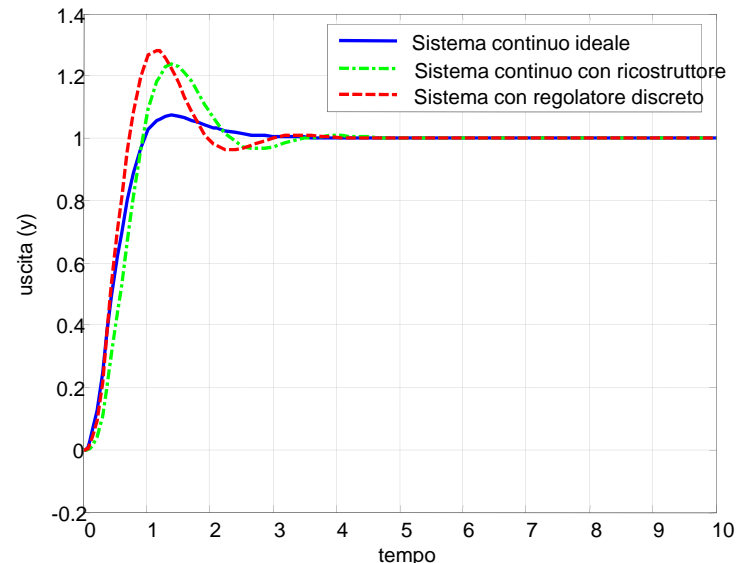


$$G_d(z) = \mathcal{Z}\{H_0(s)G(s)\}$$

La funzione di trasferimento discreta  $G_d(z)$  con la sequenza di ingresso  $u_d(kT)$  fornisce, negli istanti di campionamento, gli stessi valori dell'uscita di  $G(s)$ , con in ingresso la stessa sequenza opportunamente ricostruita

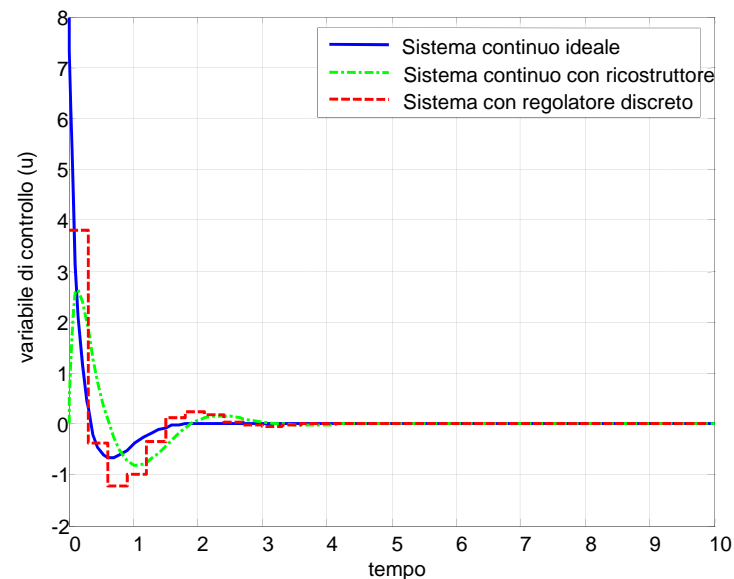
# Implementazione digitale di un generico regolatore

- Risposta al gradino del sistema



Maggiore sovravelongazione dovuta al peggioramento del margine di fase

- Variabile di controllo corrispondente



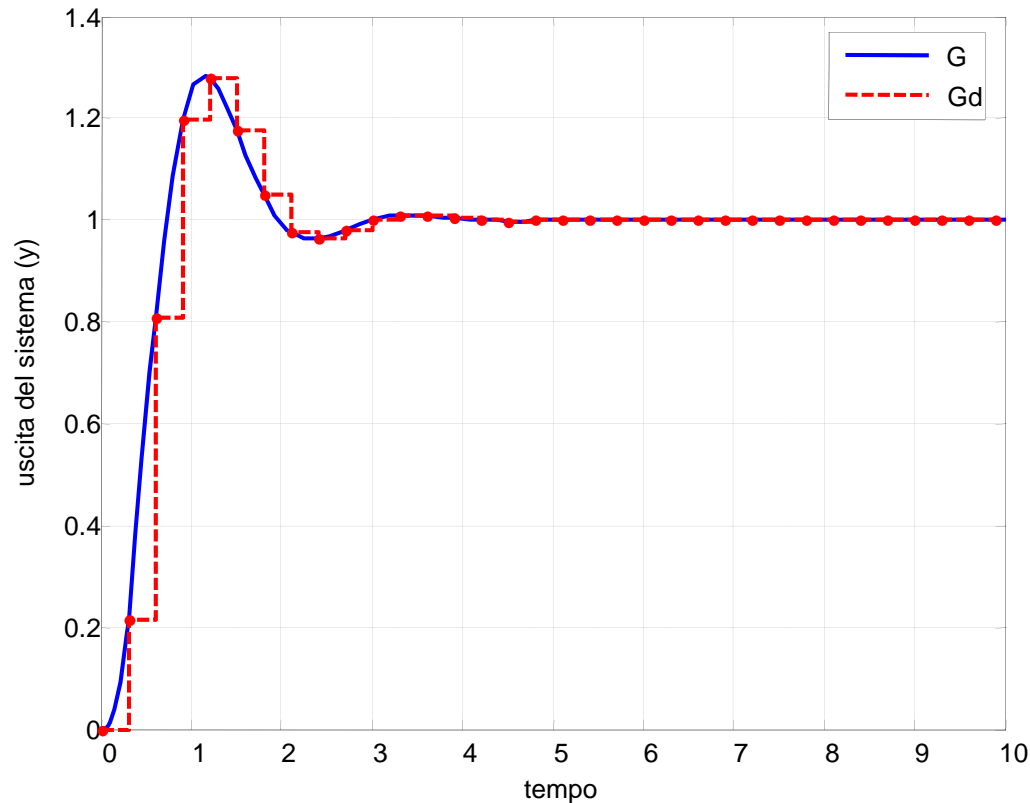
Il comando matlab

```
>> stairs(td,yd)
```

consente di fare il plottaggio a gradini della sequenza tempo discreta ricostruita

# Implementazione digitale di un generico regolatore

- Confronto tra la risposta di  $G(s)$  e  $G_d(z) = \mathcal{Z}\{H_0(s)G(s)\}$  con il regolatore digitale



- $G_d(z)$  non è un'approssimazione, ma una descrizione dell'impianto se l'ingresso è definito in istanti discreti

## Implementazione digitale di un generico regolatore

- Equazione alle differenze corrispondente al regolatore digitale

$$R_d(z) = \frac{1.9 - 1.3z^{-1}}{0.5 + 0.1z^{-1}} = \frac{U(z)}{E(z)}$$



$$0.5U(z) + 0.1z^{-1}U(z) = 1.9E(z) - 1.3z^{-1}E(z)$$



$$0.5u_k + 0.1u_{k-1} = 1.9e_k - 1.3e_{k-1}$$

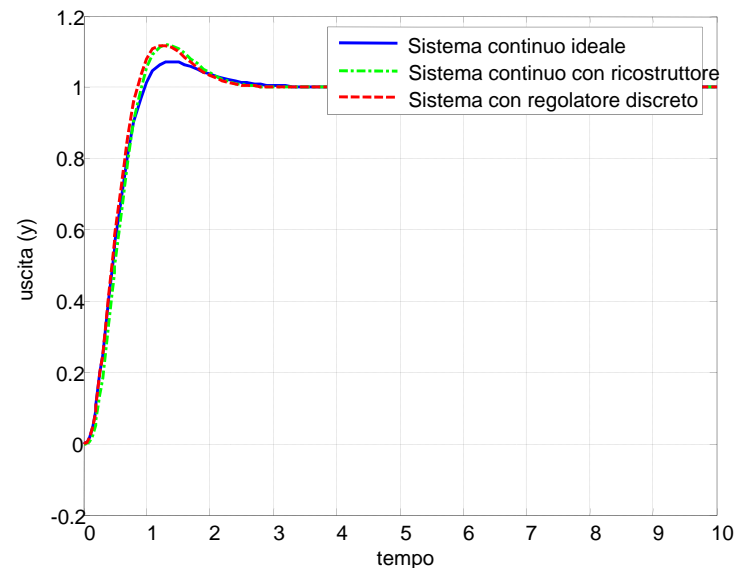
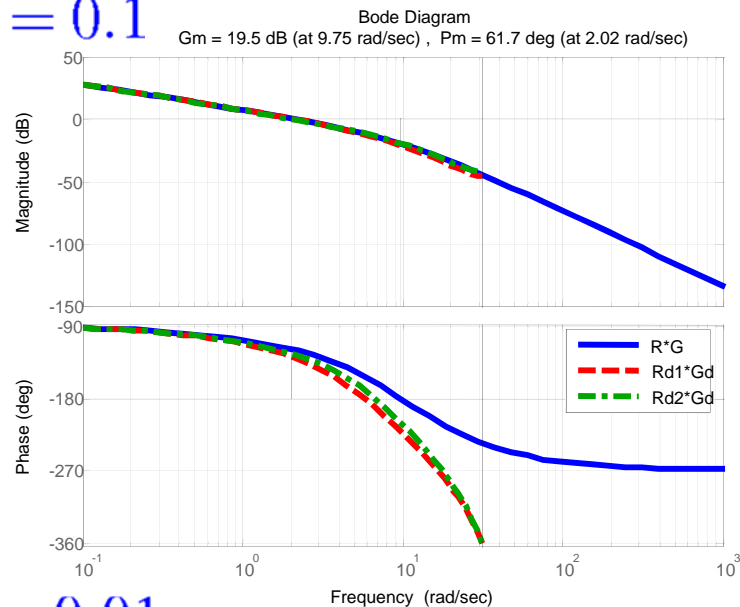


$$u_k = -0.2u_{k-1} + 3.8e_k - 2.6e_{k-1}$$

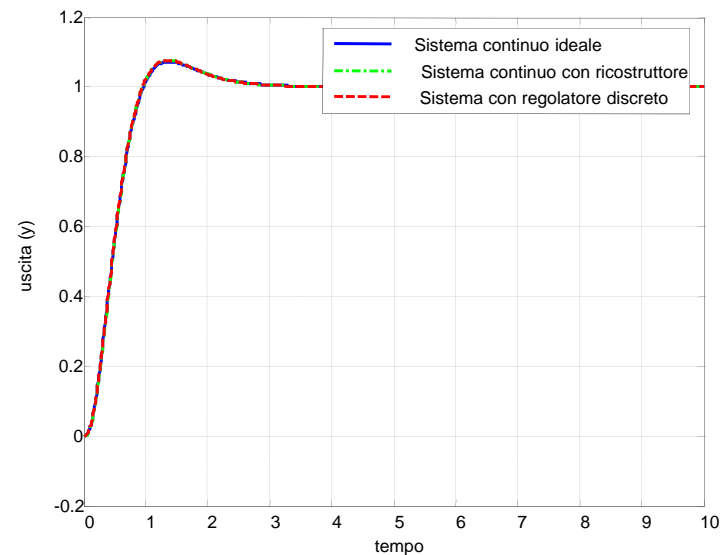
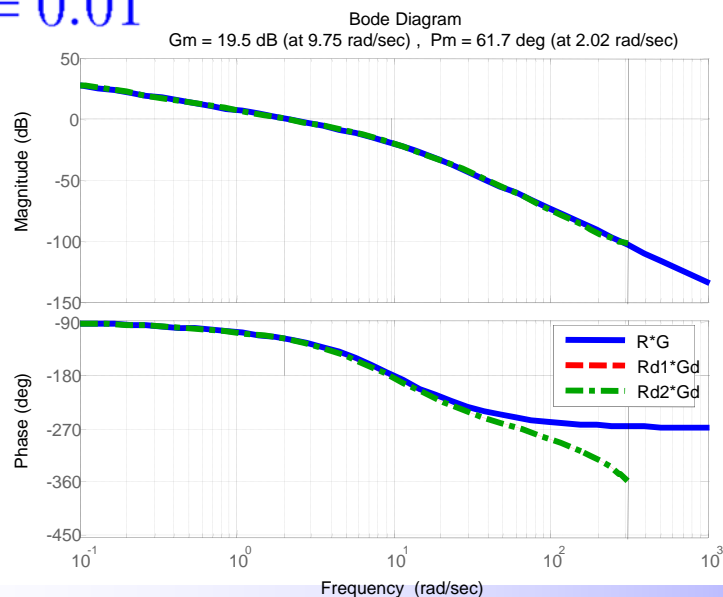
# Implementazione digitale di un generico regolatore

- Se si varia il periodo di campionamento

- $T = 0.1$

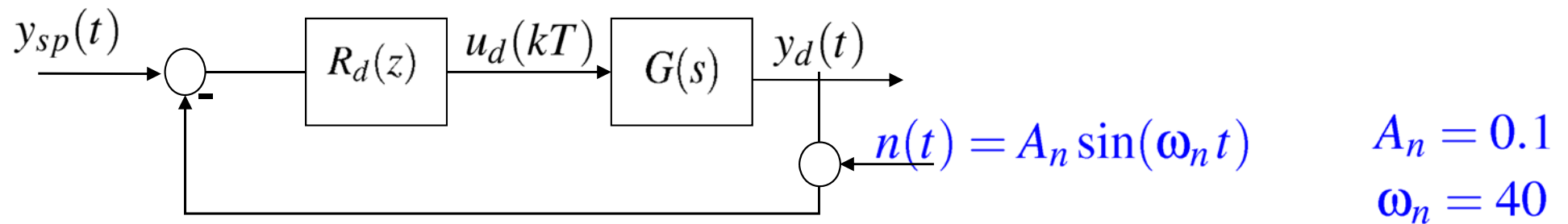


- $T = 0.01$

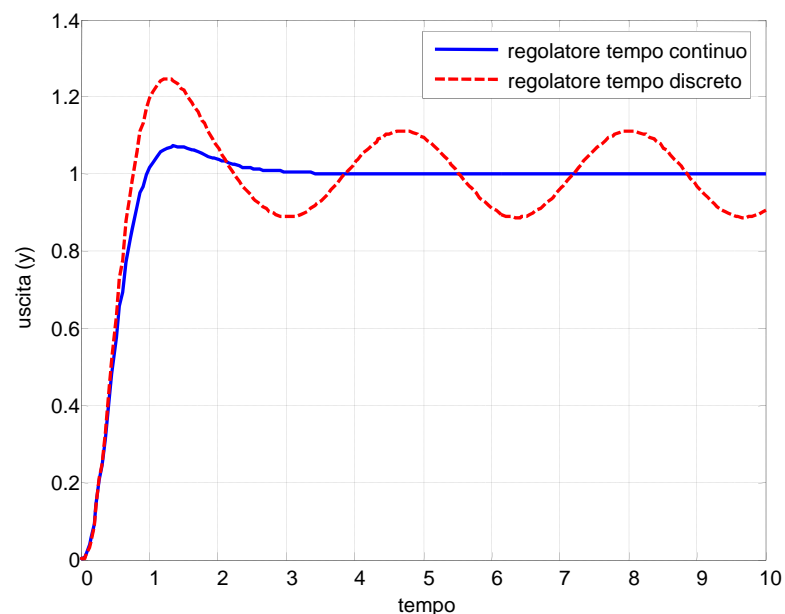


# Implementazione digitale di un generico regolatore

- Se ora si considera un disturbo di misura sulla variabile retroazionata

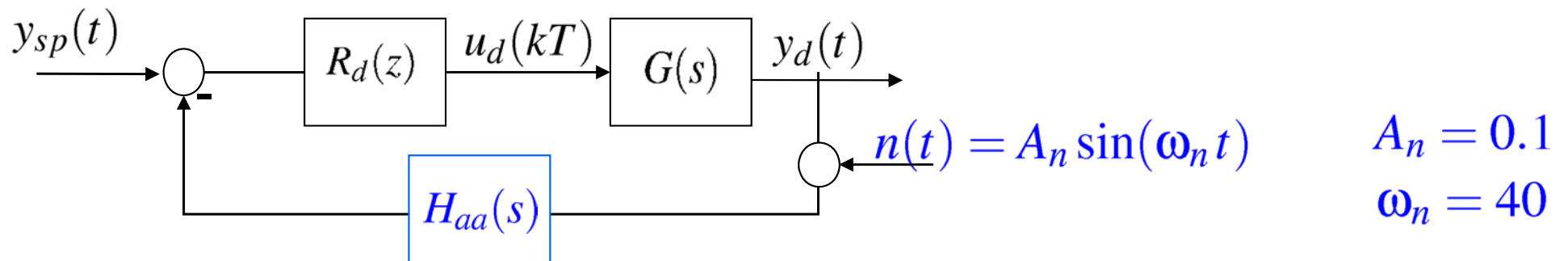


il campionamento, con  $T = 0.15$  riporta nella banda del sistema regolatore/impianto il disturbo (che invece, nel caso tempo continuo, viene attenuato efficacemente)

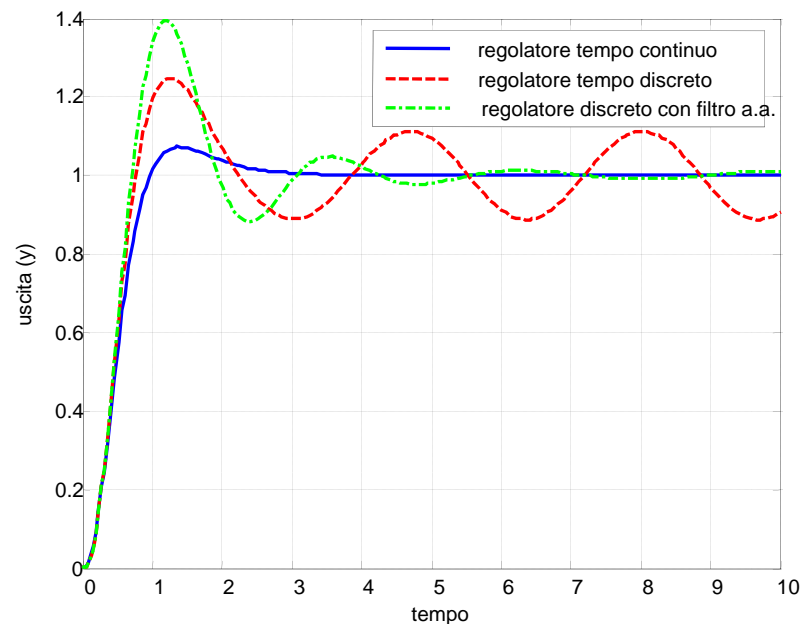


# Implementazione digitale di un generico regolatore

- Occorre pertanto aggiungere un filtro anti-aliasing



Considerando un filtro di Butterworth di ordine 2 con pulsazione di rottura  $\omega_{aa} = 10$  si riesce ad attenuare l'influenza del disturbo sull'uscita



Maggiore sovraelongazione dovuta al peggioramento del margine di fase dovuto al filtro passa basso

# **CONTROLLI AUTOMATICI**

## **Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo**

<http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti/ControlliAutomtici.html>

# **IMPLEMENTAZIONE DIGITALE DEI REGOLATORI FINE**

Ing. Luigi Biagiotti

e-mail: [luigi.biagiotti@unimore.it](mailto:luigi.biagiotti@unimore.it)

<http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti>