

CONTROLLI AUTOMATICI

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

<http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti/ControlliAutomatici.html>

DIAGRAMMI DI BODE

Ing. Luigi Biagiotti

e-mail: luigi.biagiotti@unimore.it

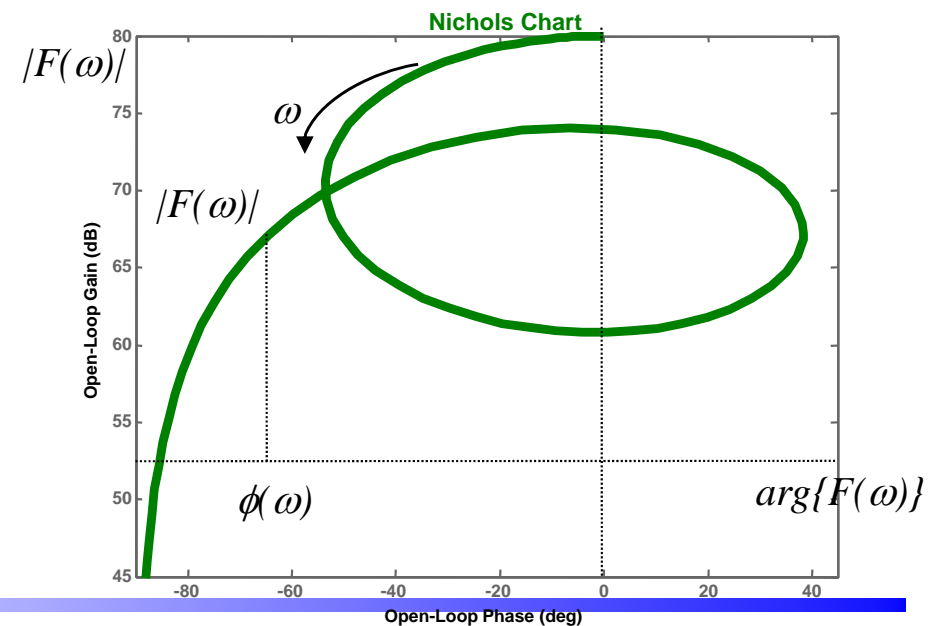
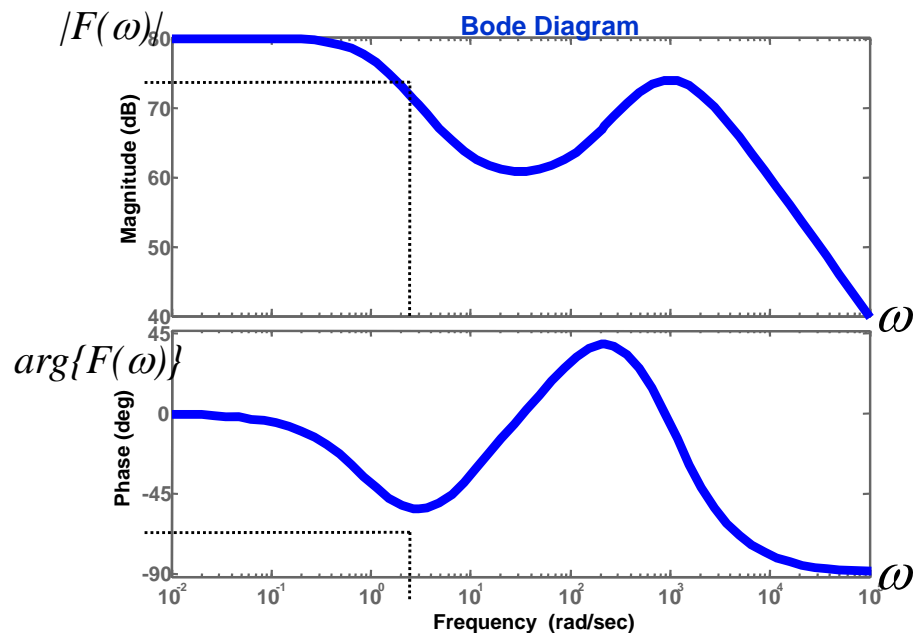
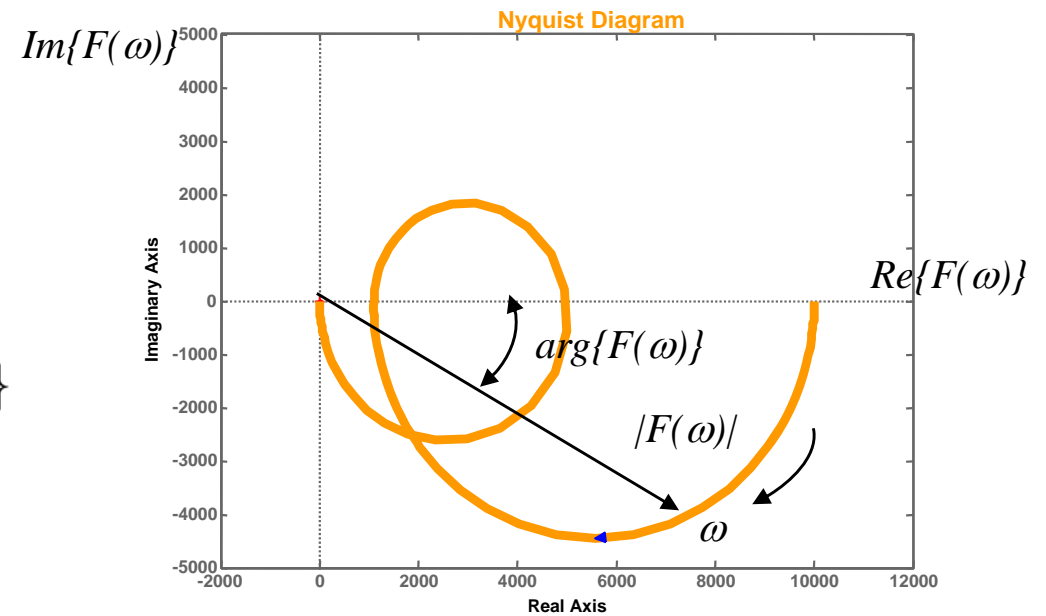
<http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti>

Diagrammi di Bode e polari

- Problema della rappresentazione grafica di funzioni complesse di variabile reale del tipo:

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= \frac{N(\omega)}{D(\omega)} \\
 &= |F(\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \\
 &= \text{Re}\{F(\omega)\} + j \text{Im}\{F(\omega)\}
 \end{aligned}$$

➔ *Tre possibili rappresentazioni!*



Diagrammi di Bode

- La rappresentazione grafica della funzione di risposta armonica viene effettuata con speciali diagrammi, che costituiscono la base dei procedimenti grafici per la sintesi delle reti correttive nel dominio delle frequenze. Fra questi sono di largo impiego i **diagrammi di Bode**.
- Poiché la funzione di risposta armonica ha valori complessi, si hanno due diversi diagrammi:
 - **diagramma delle ampiezze** o dei moduli, che riporta il logaritmo del modulo della risposta armonica;
 - **diagramma delle fasi** o degli argomenti, che riporta l'argomento della risposta armonica.
- Entrambi i diagrammi sono in funzione del logaritmo della pulsazione ω .

Diagrammi di Bode

- Funzione di trasferimento in forma fattorizzata (costanti di tempo):

$$G(s) = \frac{\mu}{s^h} \frac{\prod_k (1 + T_k s) \prod_i \left(1 + 2 \frac{\zeta_i}{\alpha_{n,i}} s + \frac{s^2}{\alpha_{n,i}^2} \right)}{\prod_k (1 + \tau_k s) \prod_i \left(1 + 2 \frac{\delta_i}{\omega_{n,i}} s + \frac{s^2}{\omega_{n,i}^2} \right)}$$

- Funzione di risposta armonica associata:

$$F(\omega) = G(j\omega) = \frac{\mu}{(j\omega)^h} \frac{\prod_k (1 + j T_k \omega) \prod_i \left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha_{n,i}^2} + j 2 \frac{\zeta_i}{\alpha_{n,i}} \omega \right)}{\prod_k (1 + j \tau_k \omega) \prod_i \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{n,i}^2} + j 2 \frac{\delta_i}{\omega_{n,i}} \omega \right)}$$

- 4 fattori elementari:

- Guadagno statico
- Poli/zeri reali
- Poli/zeri origine
- Poli/zeri complessi coniugati

Diagrammi di Bode

- Vedremo che il tracciamento dei due diagrammi di Bode (ampiezze e fasi) potrà essere eseguito sommando i diagrammi dei fattori elementari. Questo è possibile grazie alle proprietà dei numeri complessi e al fatto di graficare il valore dell'ampiezza in scala logaritmica.

Proprietà numeri complessi

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$\arg(a \cdot b) = \arg(a) + \arg(b)$$

$$\arg\left(\frac{a}{b}\right) = \arg(a) - \arg(b)$$

$$\arg(a^k) = k \arg(a)$$

Proprietà logaritmi

$$\log(|a| \cdot |b|) = \log(|a|) + \log(|b|)$$

$$\log\left(\frac{|a|}{|b|}\right) = \log(|a|) - \log(|b|)$$

$$\log(|a|^k) = k \log(|a|)$$

- Dati quindi (a, b, c, \dots, q) complessi e (k, \dots, q) interi si ha che

$$\log \left| \frac{a \dots b^k}{c \dots d^q} \right| = \log |a| + \dots + k \log |b| - \log |c| - \dots - q \log |d|$$

$$\arg \left(\frac{a \dots b^k}{c \dots d^q} \right) = \arg(a) + \dots + k \arg(b) - \arg(c) - \dots - q \arg(d)$$

Diagrammi di Bode

I vantaggi che si hanno impiegando la scala logaritmica sono:

- Possibilità di rappresentare col dovuto dettaglio **grandezze che variano in campi notevolmente estesi**;
- Possibilità di **sommare i diagrammi relativi a sistemi in cascata**, per ottenere il diagramma del sistema complessivo: infatti la risposta armonica complessiva si ottiene eseguendo il prodotto delle singole risposte armoniche, cioè eseguendo il prodotto delle ampiezze (che, impiegando una scala logaritmica, si riconduce ad una somma) e la somma delle fasi;
- Possibilità di costruire i diagrammi relativi ad una funzione di risposta armonica data in forma fattorizzata come **somma di diagrammi elementari**, di un numero limitato di tipi fondamentali, corrispondente ciascuno ad un singolo fattore.

Diagrammi di Bode

Ampiezza espressa in decibel: $|M|_{\text{db}} = 20 \log_{10}(|M|)$

Ampiezza (db)
Fase (gradi)

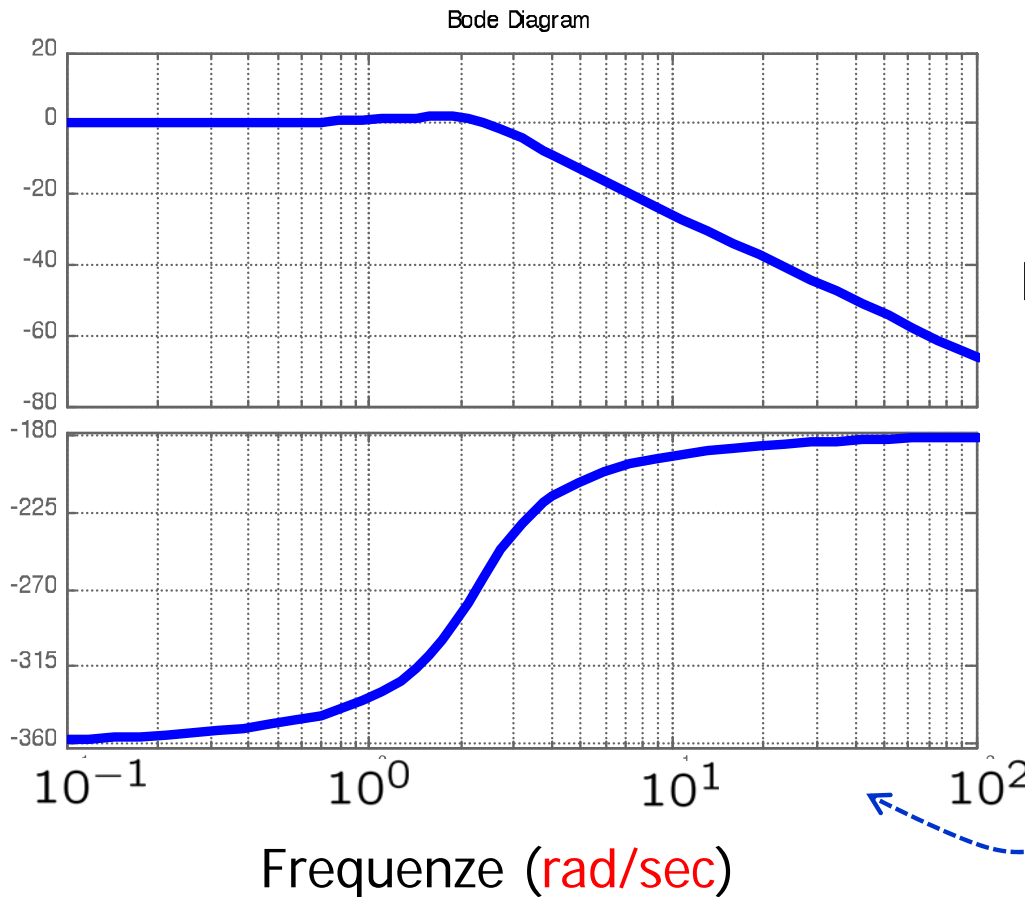


Diagramma logaritmico

Diagramma semi-logaritmico

Scala logaritmica
(possibilità di rappresentare
con il dovuto dettaglio
grandezze che variano in
campi molto estesi)

Diagrammi di Bode

$$F(\omega) = \frac{\mu}{(j\omega)^h} \frac{\prod_k (1 + j T_k \omega) \prod_i \left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha_{n,i}^2} + j 2 \frac{\zeta_i}{\alpha_{n,i}} \omega \right)}{\prod_k (1 + j \tau_k \omega) \prod_i \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{n,i}^2} + j 2 \frac{\delta_i}{\omega_{n,i}} \omega \right)}$$

$$\begin{aligned} 20 \log |F(\omega)| &= \boxed{20 \log |\mu|} - h \boxed{20 \log |j\omega|} \quad \text{Termini elementari} \\ &+ \sum_k \boxed{20 \log |1 + j T_k \omega|} + \sum_i \boxed{20 \log \left| 1 - \frac{\omega^2}{\alpha_{n,i}^2} + j 2 \frac{\zeta_i}{\alpha_{n,i}} \omega \right|} \\ &- \sum_k 20 \log |1 + j \tau_k \omega| - \sum_i 20 \log \left| 1 - \frac{\omega^2}{\omega_{n,i}^2} + j 2 \frac{\delta_i}{\omega_{n,i}} \omega \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \arg(F(\omega)) &= \boxed{\arg(\mu)} - \boxed{h \arg(j\omega)} \quad \text{Termini elementari} \\ &+ \sum_k \boxed{\arg(1 + j T_k \omega)} + \sum_i \boxed{\arg \left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha_{n,i}^2} + j 2 \frac{\zeta_i}{\alpha_{n,i}} \omega \right)} \\ &- \sum_k \arg(1 + j \tau_k \omega) - \sum_i \arg \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{n,i}^2} + j 2 \frac{\delta_i}{\omega_{n,i}} \omega \right) \end{aligned}$$

Termini elementari

Ampiezza		Fase
$\log \mu $	guadagno statico	$\arg(\mu)$
$\log j\omega $	zero origine	$\arg(j\omega)$
$\log 1 + jT_i\omega $	zero reale	$\arg(1 + jT_i\omega)$
$\log \left 1 + 2\zeta_i \frac{\omega}{\alpha_{n,i}} j - \frac{\omega^2}{\alpha_{n,i}^2} \right $	zeri c.c.	$\arg \left(1 + 2\zeta_i \frac{\omega}{\alpha_{n,i}} j - \frac{\omega^2}{\alpha_{n,i}^2} \right)$

- I contributi dei poli si ottengono da quelli degli zeri semplicemente cambiando segno (ribaltamento attorno all'asse delle ascisse)
- I contributi di poli/zeri multipli si ottengono semplicemente da quelli a molteplicità singola moltiplicando per la molteplicità

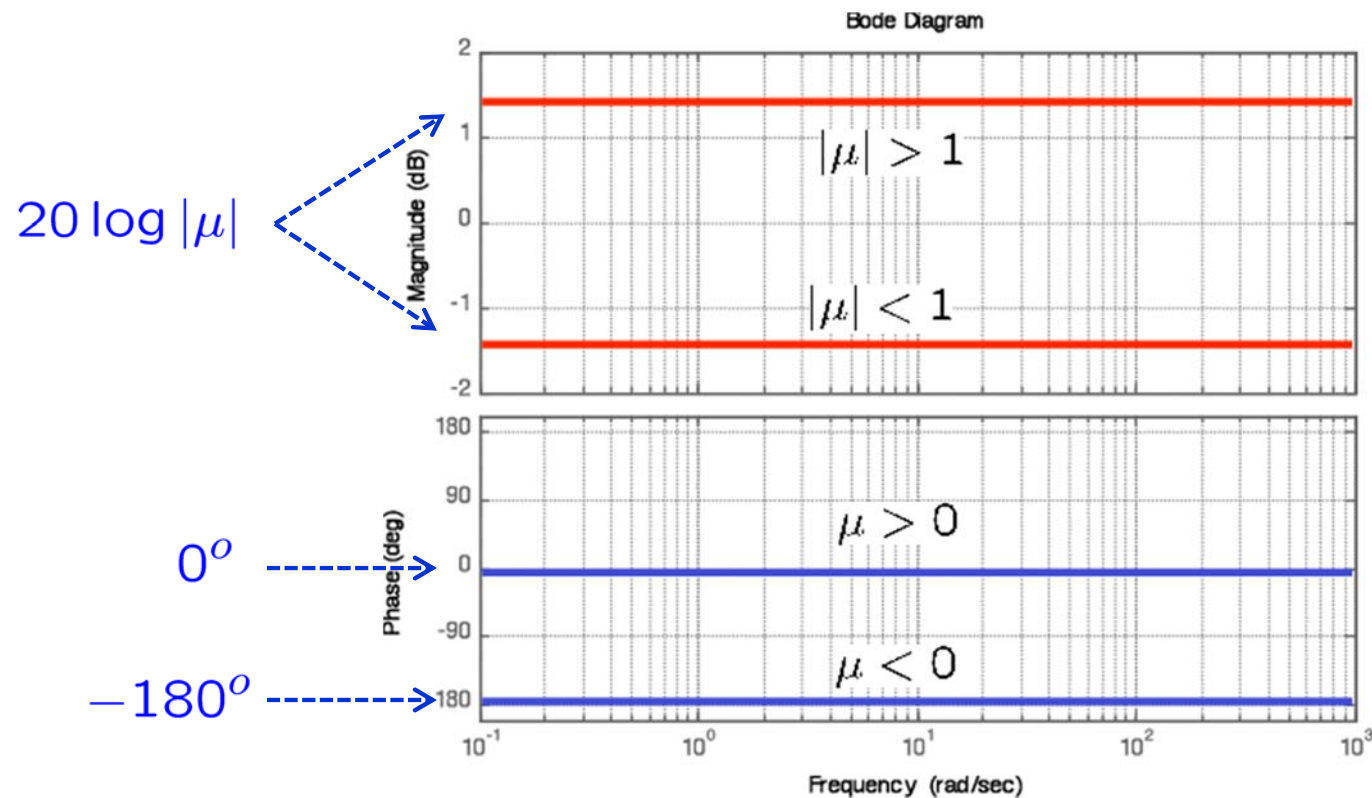
Guadagno statico

Ampiezza

$$20 \log |\mu| \begin{cases} > 0 & \text{se } |\mu| > 1 \\ = 0 & \text{se } |\mu| = 1 \\ < 0 & \text{se } |\mu| < 1 \end{cases}$$

Fase

$$\arg(\mu) \begin{cases} = 0 & \text{se } \mu > 0 \\ = -180^\circ & \text{se } \mu < 0 \end{cases}$$



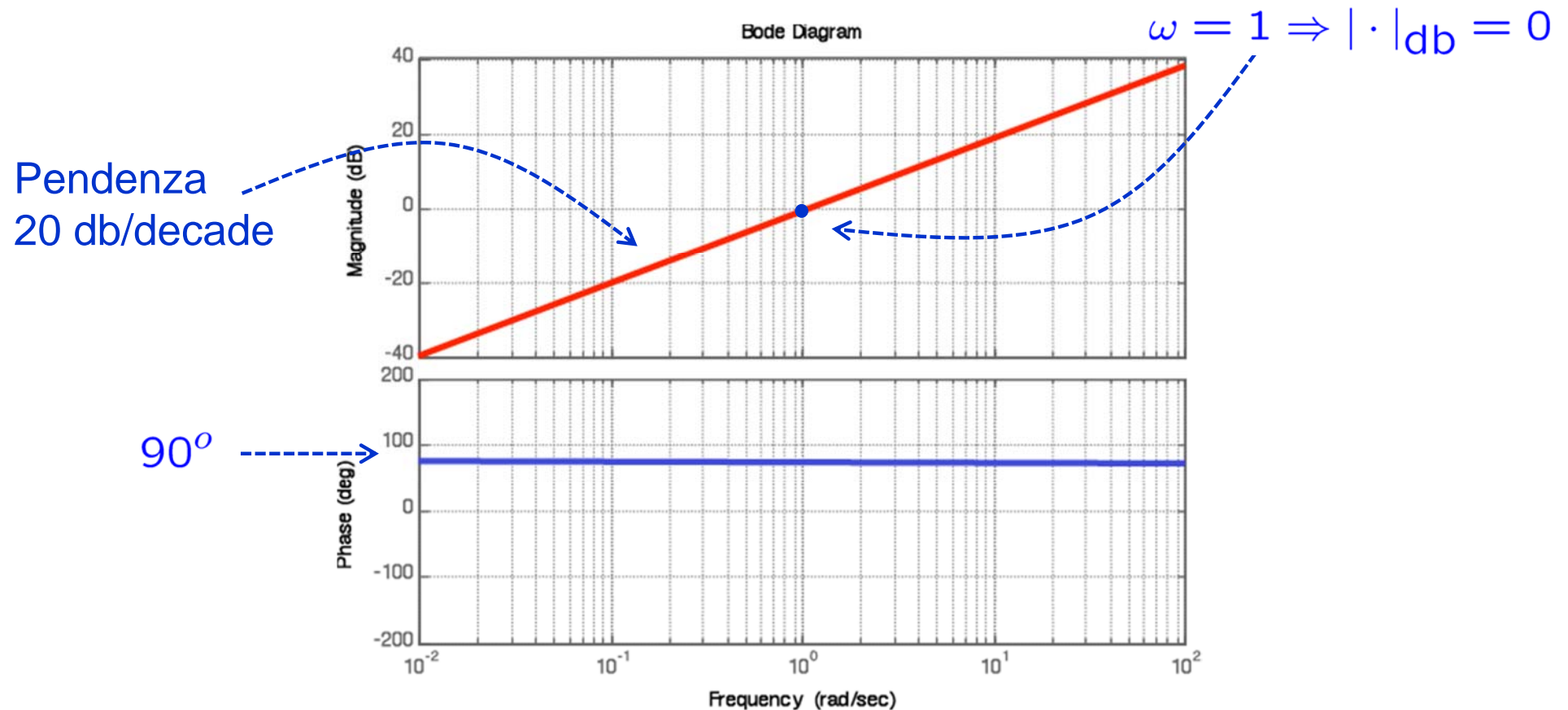
Zero nell'origine

Ampiezza

$$\begin{aligned}20 \log |j\omega| &= 20 \log \sqrt{\omega^2} \\ &= 20 \log(\omega)\end{aligned}$$

Fase

$$\begin{aligned}\arg(j\omega) &= \operatorname{atan}\left(\frac{\omega}{0}\right) \\ &= \operatorname{atan}(\infty) = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$



Polo nell'origine

- **Polo nell'origine** : Il relativo contributo (da sommare nel calcolo dei diagrammi complessivi) si ottiene semplicemente ribaltando gli andamenti appena calcolati attorno all'asse delle ascisse

Ampiezza

Fase

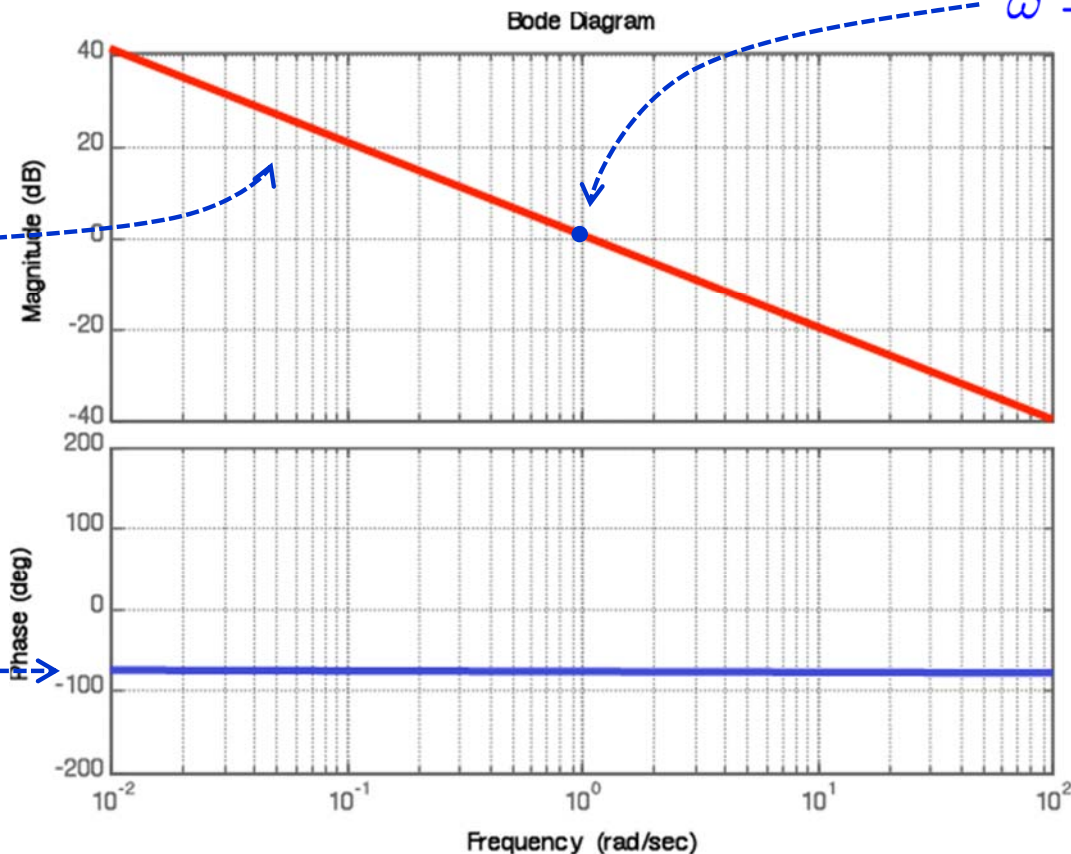
$$-20 \log |j\omega| = -20 \log |\omega|$$

$$-\arg(j\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\omega = 1 \Rightarrow |\cdot|_{\text{db}} = 0$$

Pendenza
-20 db/decade

-90°

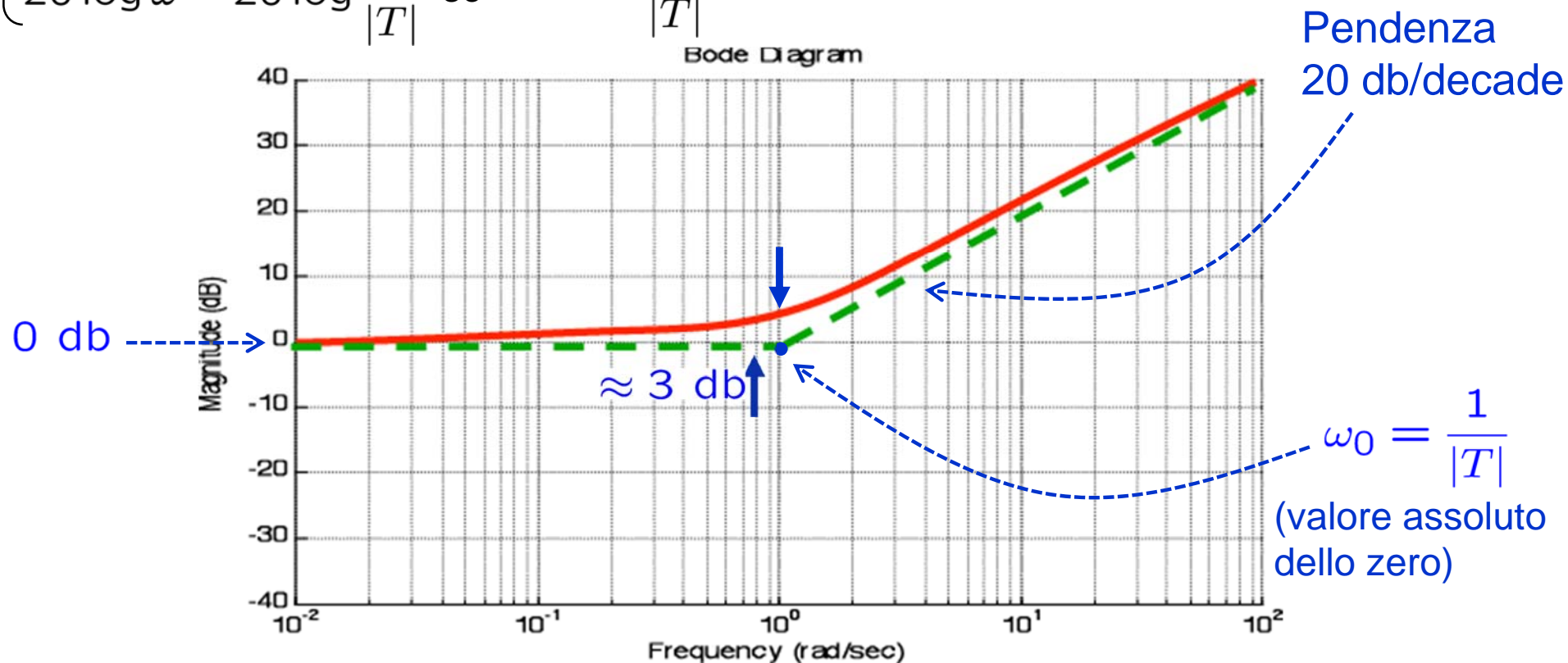


Zero reale

Ampiezza

Fase

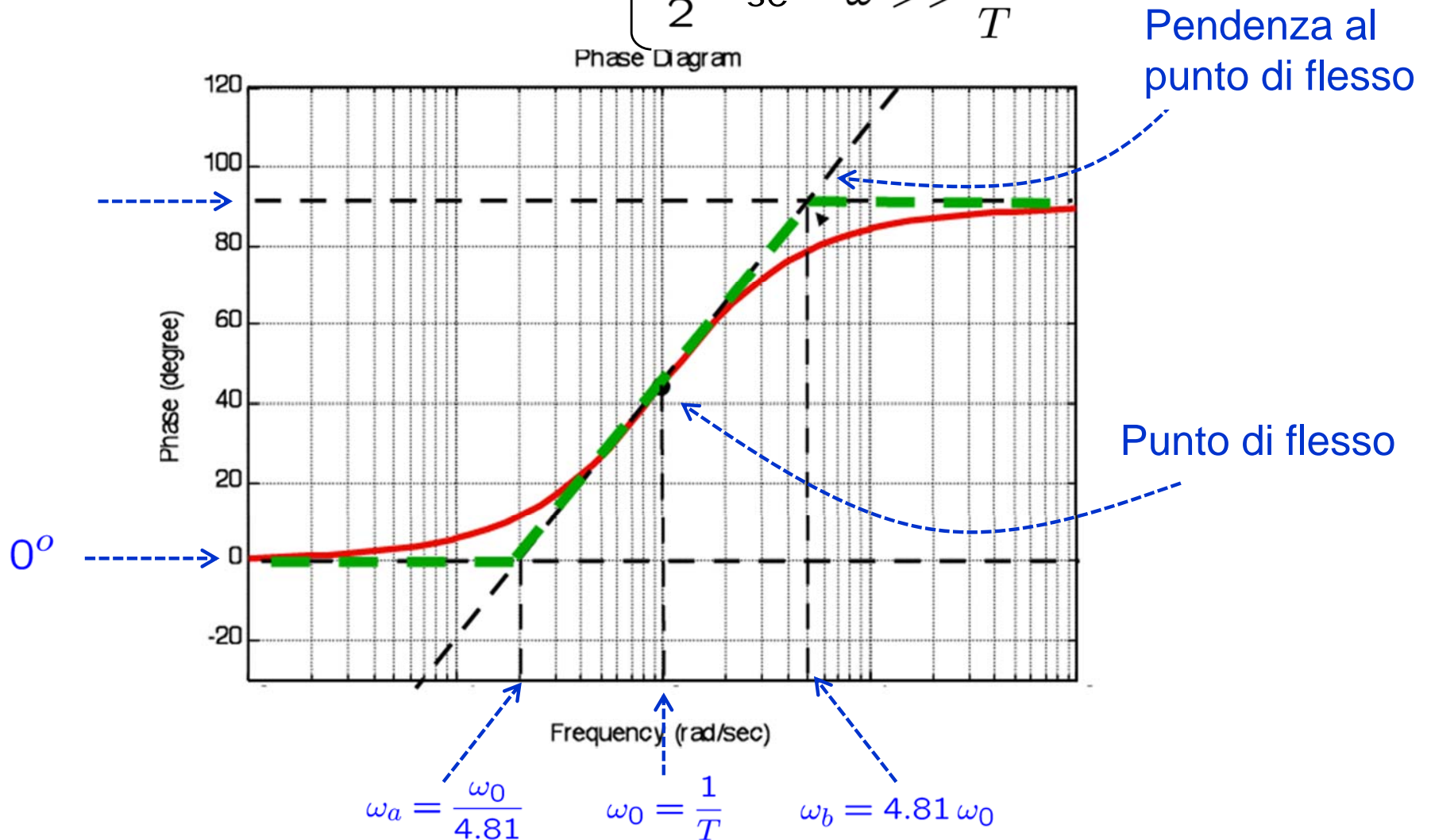
$$20 \log |1 + jT\omega| = 20 \log \sqrt{1 + T^2\omega^2}$$
$$\arg(1 + jT\omega) = \operatorname{atan}\left(\frac{T\omega}{1}\right)$$
$$\approx \begin{cases} 0 & \text{se } \omega \ll \frac{1}{|T|} \\ 20 \log(|T|\omega) = \\ 20 \log \omega - 20 \log \frac{1}{|T|} & \text{se } \omega \gg \frac{1}{|T|} \end{cases}$$



Zero reale: fase

Caso $T > 0$

$$\arg(1 + jT\omega) = \text{atan}\left(\frac{T\omega}{1}\right) \approx \begin{cases} 0 & \text{se } \omega \ll \frac{1}{T} \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } \omega \gg \frac{1}{T} \end{cases}$$

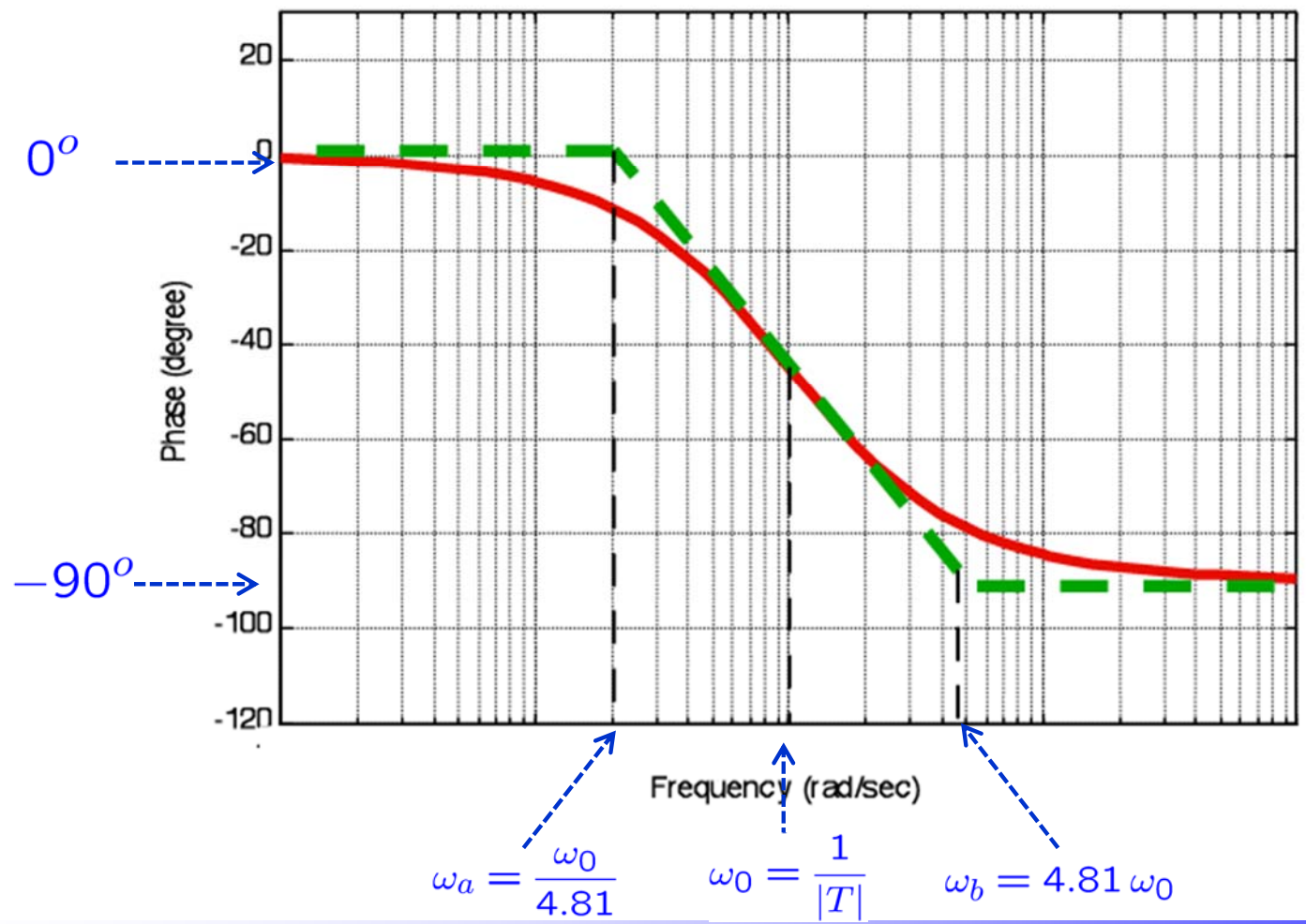


Zero reale: fase

Caso $T < 0$

$$\arg(1 + jT\omega) = \operatorname{atan}\left(\frac{T\omega}{1}\right) \approx \begin{cases} 0 & \text{se } \omega \ll \frac{1}{|T|} \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } \omega \gg \frac{1}{|T|} \end{cases}$$

NB: il diagramma delle fasi è speculare rispetto all'asse ω

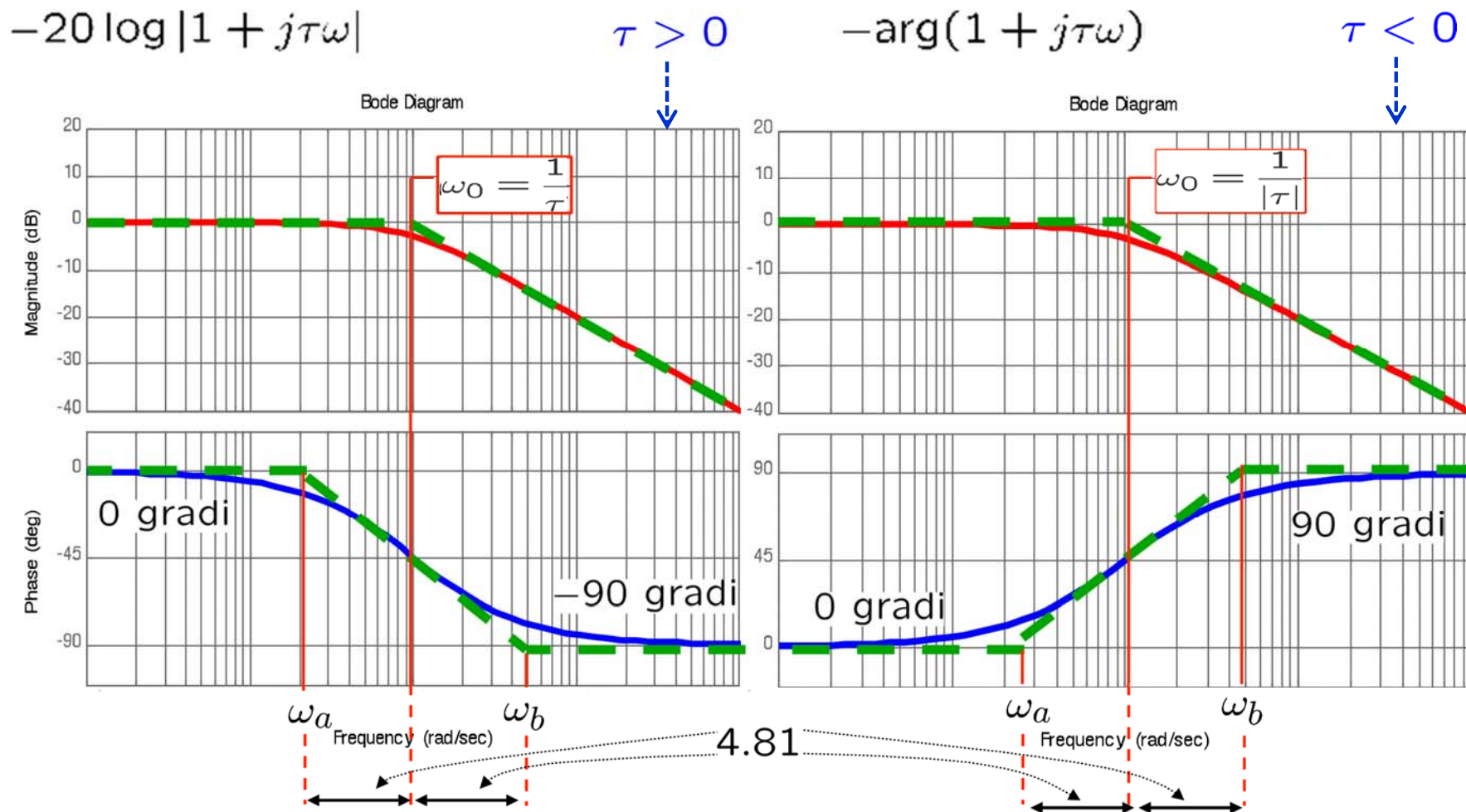


Polo reale

- **Polo reale:** Il relativo contributo (da sommare nel calcolo dei diagrammi complessivi) si ottiene semplicemente ribaltando gli andamenti appena calcolati attorno all'asse delle ascisse

Ampiezza

Fase



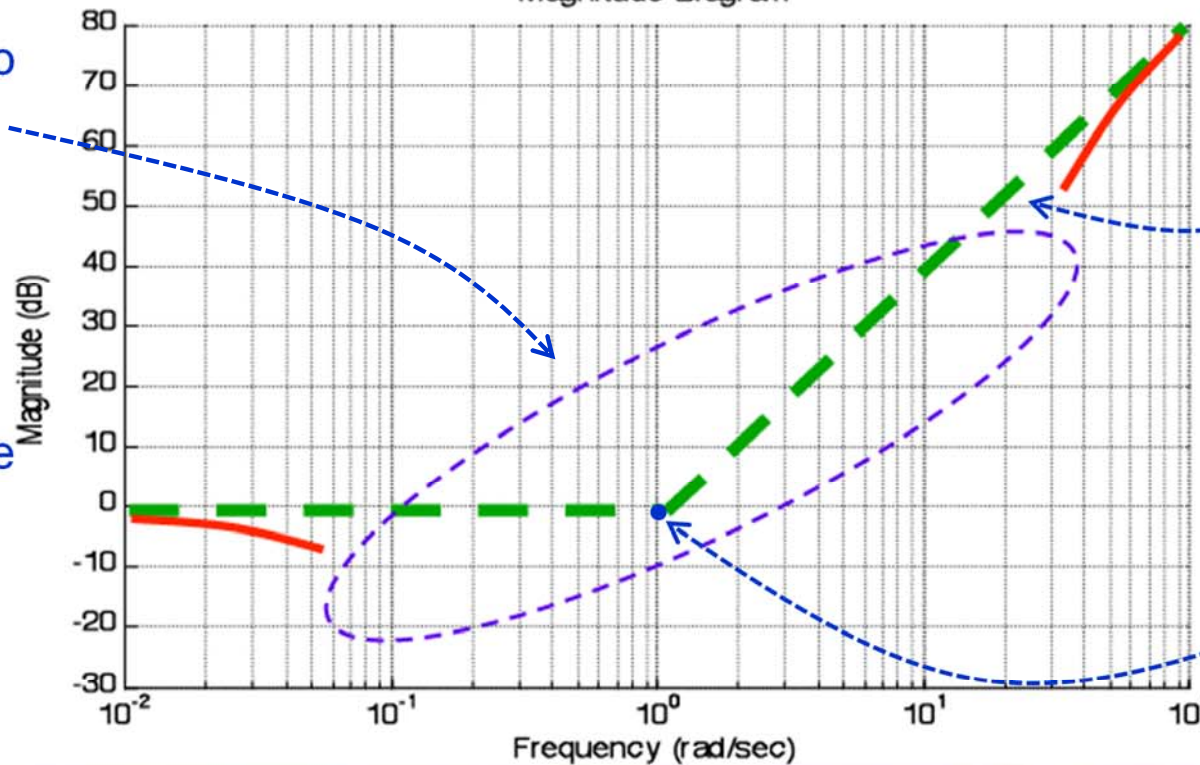
Zeri complessi coniugati: ampiezza

Ampiezza

$$20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}}$$



Magnitude Diagram



Pendenza
40 db/decade

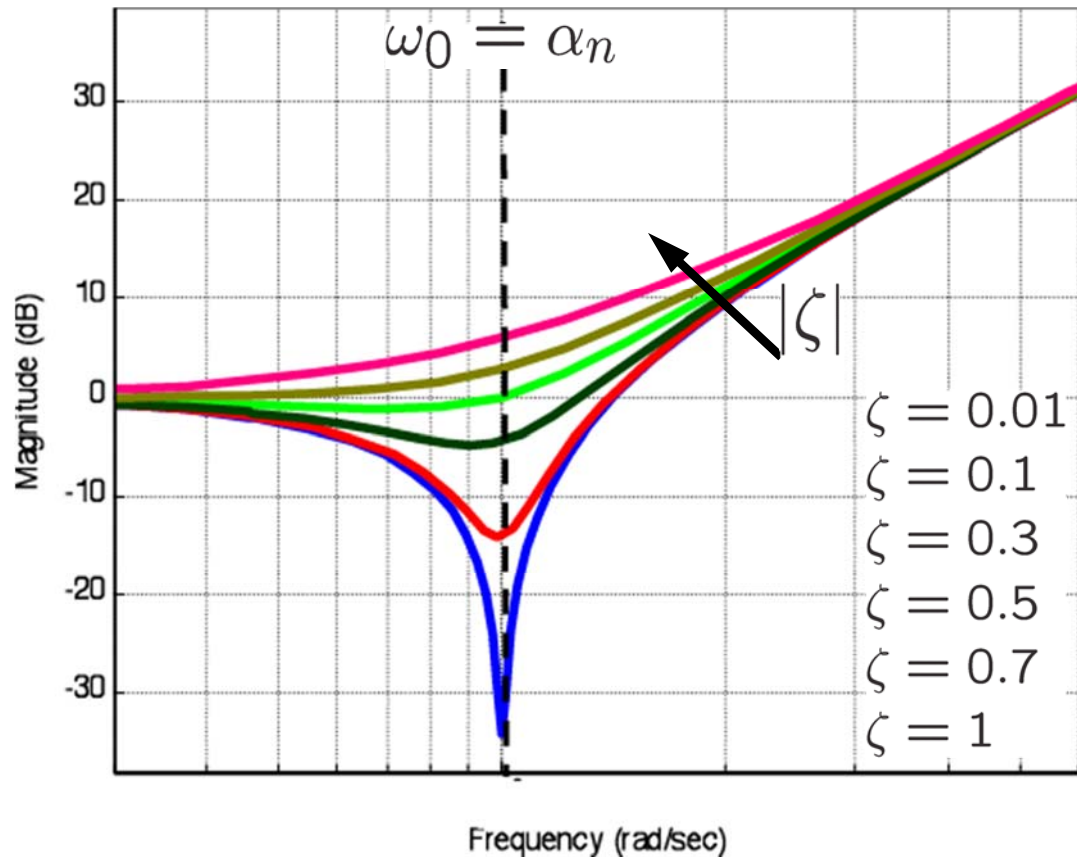
Il comportamento per frequenze prossime a α_n può discostarsi molto dal diagramma asintotico dipendentemente dal valore di ζ

$\omega_0 = \alpha_n$
(pulsazione naturale della coppia di zeri cc)

Zeri complessi coniugati: ampiezza

- Calcoliamo la frequenza del minimo della funzione $20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}}$
- $$\min \left(20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}} \right) \iff \min \left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\alpha_n^2} \right)$$

- Il valore minimo è alla frequenza $\omega_R = \alpha_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ e vale $M_R = 2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}$



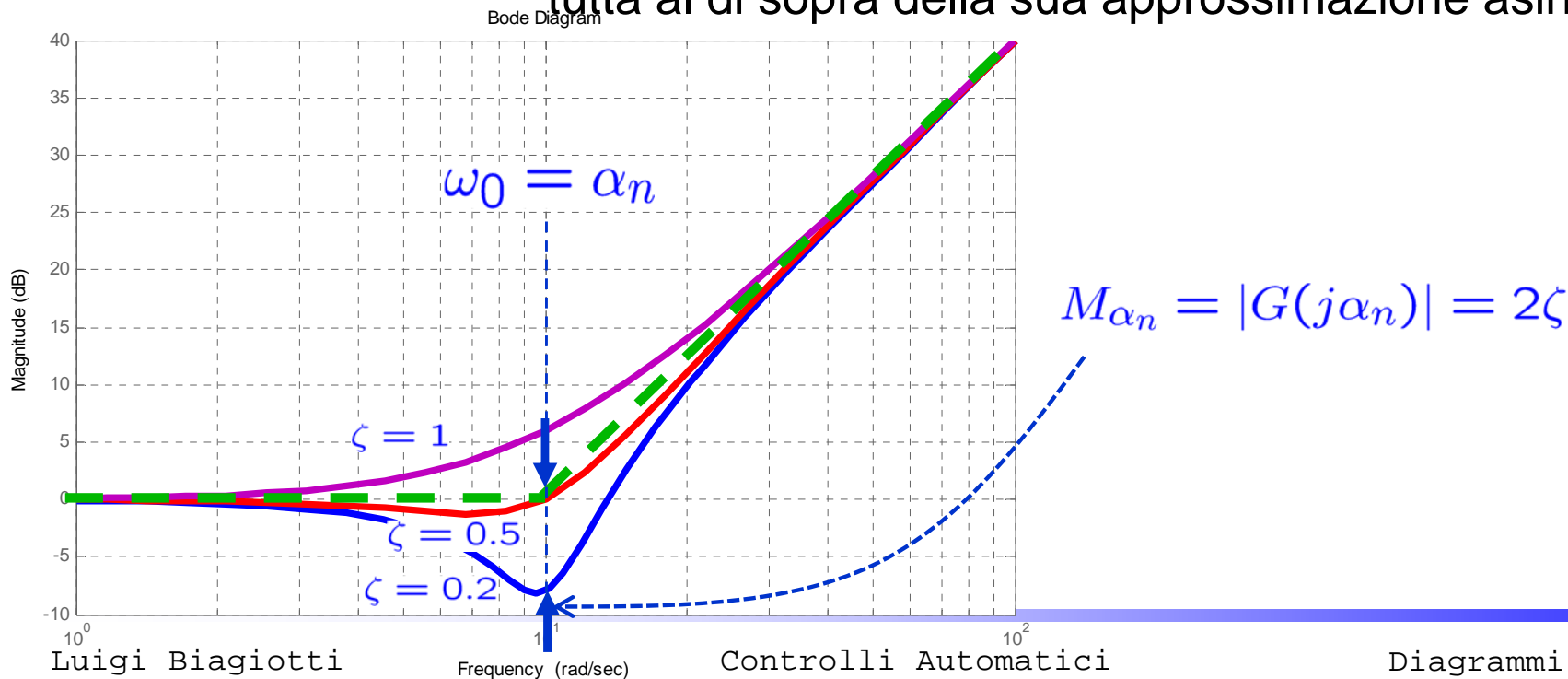
Al calare di $|\zeta|$ la frequenza di picco tende verso α_n e il valore del picco tende a $-\infty$

Il diagramma non dipende dal segno di ζ

Zeri complessi coniugati: ampiezza

Il diagramma delle ampiezze ha le seguenti proprietà:

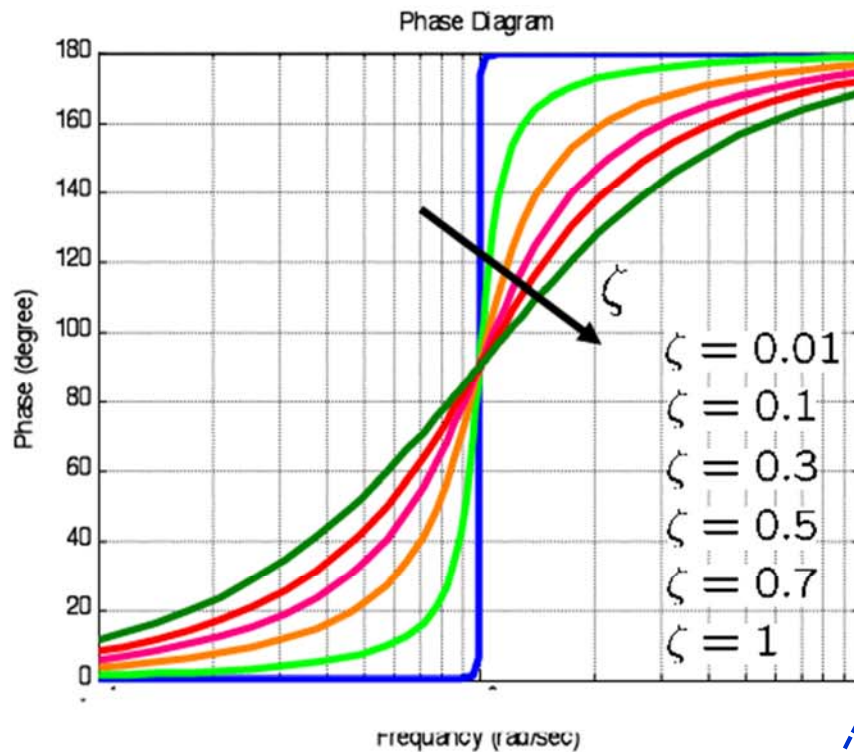
- Per $0 \leq \zeta \leq 1/\sqrt{2}$ la curva presenta un minimo;
- Per $0 \leq \zeta \leq 1/2$ la curva interseca l'asse delle ascisse a destra del punto $\omega = \alpha_n$ ed è pertanto tutta al di sotto della sua approssimazione asintotica;
- Per $1/2 \leq \zeta \leq 1/\sqrt{2}$ la curva interseca l'asse delle ascisse a sinistra del punto $\omega = \alpha_n$;
- Per $1/\sqrt{2} \leq \zeta \leq 1$ la curva non interseca l'asse delle ascisse ed è pertanto tutta al di sopra della sua approssimazione asintotica.



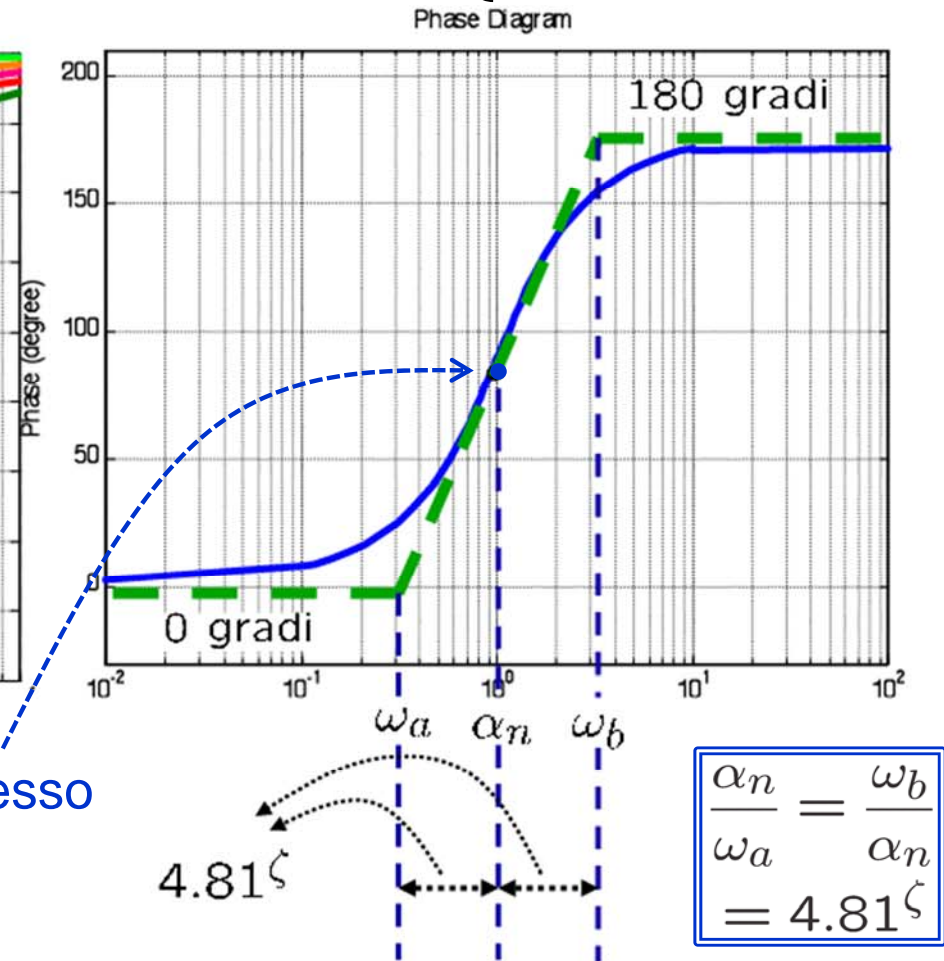
Zeri complessi coniugati: fase

Caso $\zeta > 0$

$$\arg \left(1 + 2\zeta \frac{\omega}{\alpha_n} j - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2} \right) = \text{atan2} \left(2\zeta \frac{\omega}{\alpha_n}, 1 - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2} \right) \approx \begin{cases} 0 & \text{se } \omega \ll \alpha_n \\ \pi & \text{se } \omega \gg \alpha_n \end{cases}$$



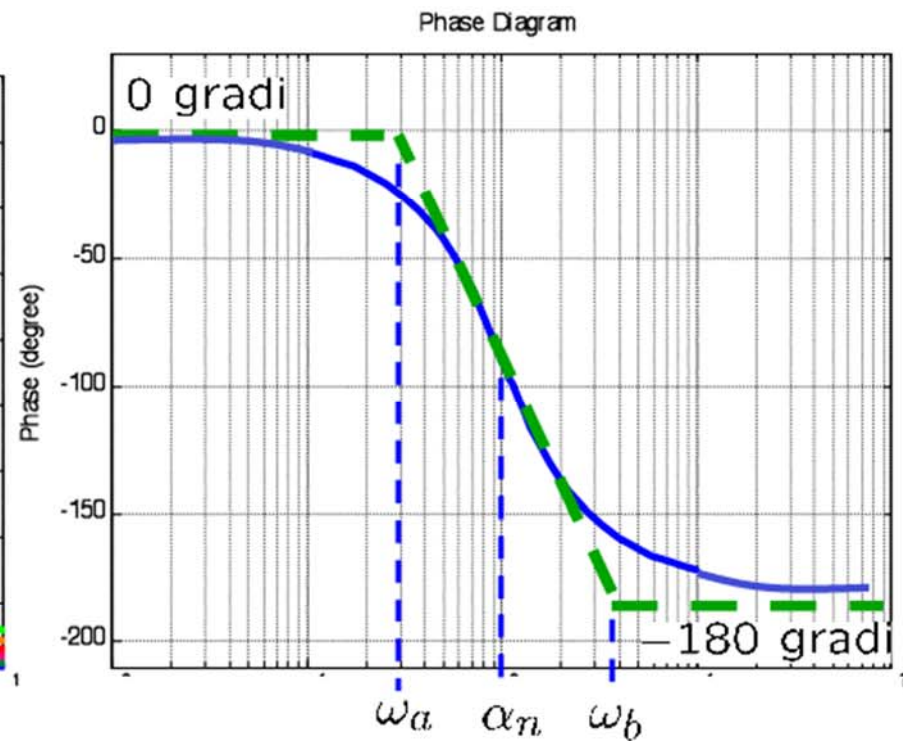
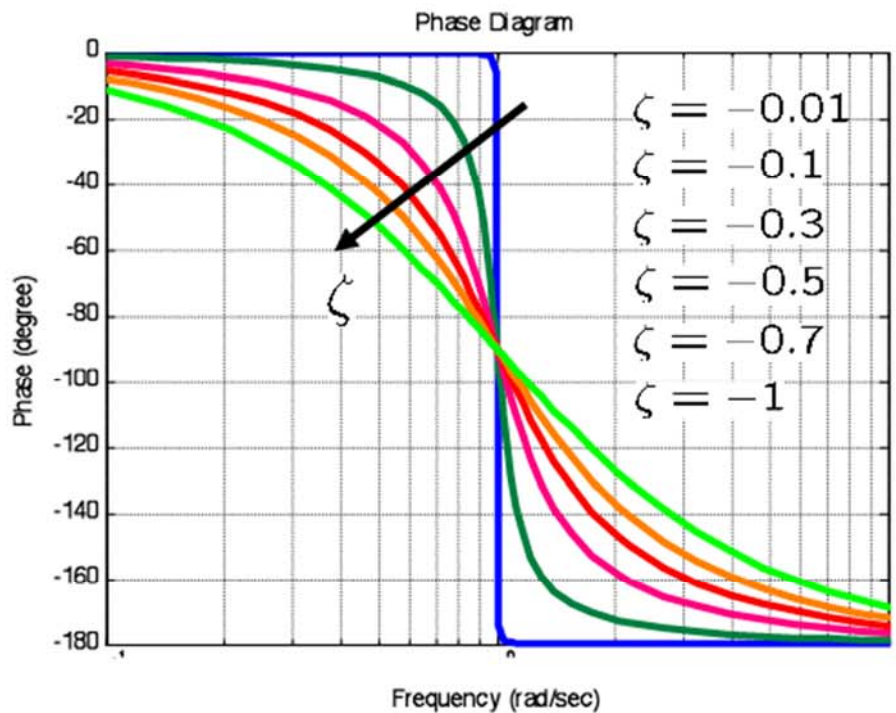
Tangente al punto di flesso



Zeri complessi coniugati: fase

Caso $\zeta < 0$

$$\arg\left(1 + 2\zeta\frac{\omega}{\alpha_n}j - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}\right) = \text{atan2}\left(2\zeta\frac{\omega}{\alpha_n}, 1 - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}\right) \approx \begin{cases} 0 & \text{se } \omega \ll \alpha_n \\ -\pi & \text{se } \omega \gg \alpha_n \end{cases}$$



$$\frac{\alpha_n}{\omega_a} = \frac{\omega_b}{\alpha_n} = 4.81|\zeta|$$

Poli complessi coniugati

- **Polo complessi coniugati:** Il relativo contributo (da sommare nel calcolo dei diagrammi complessivi) si ottiene semplicemente ribaltando gli andamenti appena calcolati attorno all'asse delle ascisse

Ampiezza

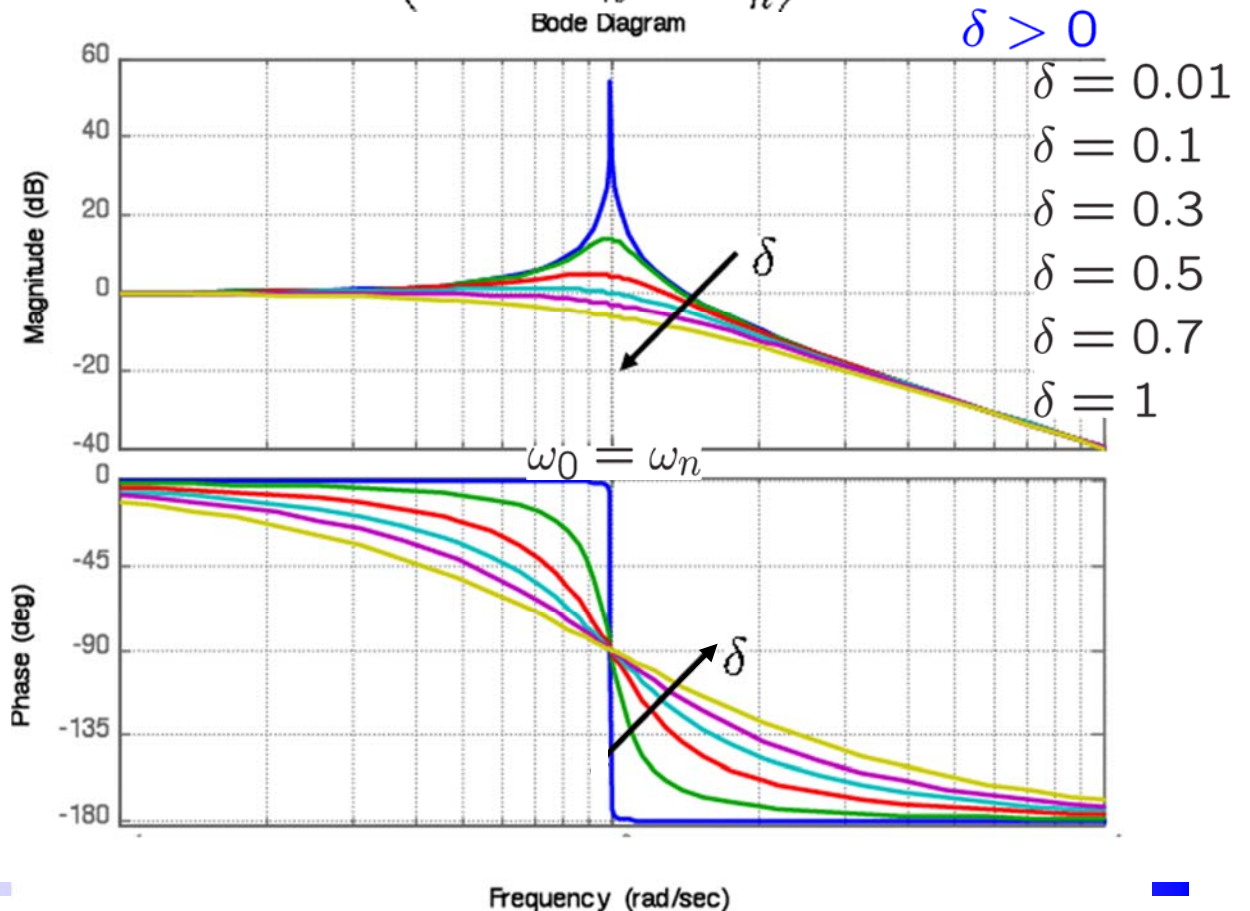
$$-20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\delta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

Il valore massimo è alla
 frequenza $\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2\delta^2}$
 e vale $M_R = \frac{1}{2\delta\sqrt{1 - \delta^2}}$

Tracciamento dei diagrammi
 asintotici analogo al caso
 precedente

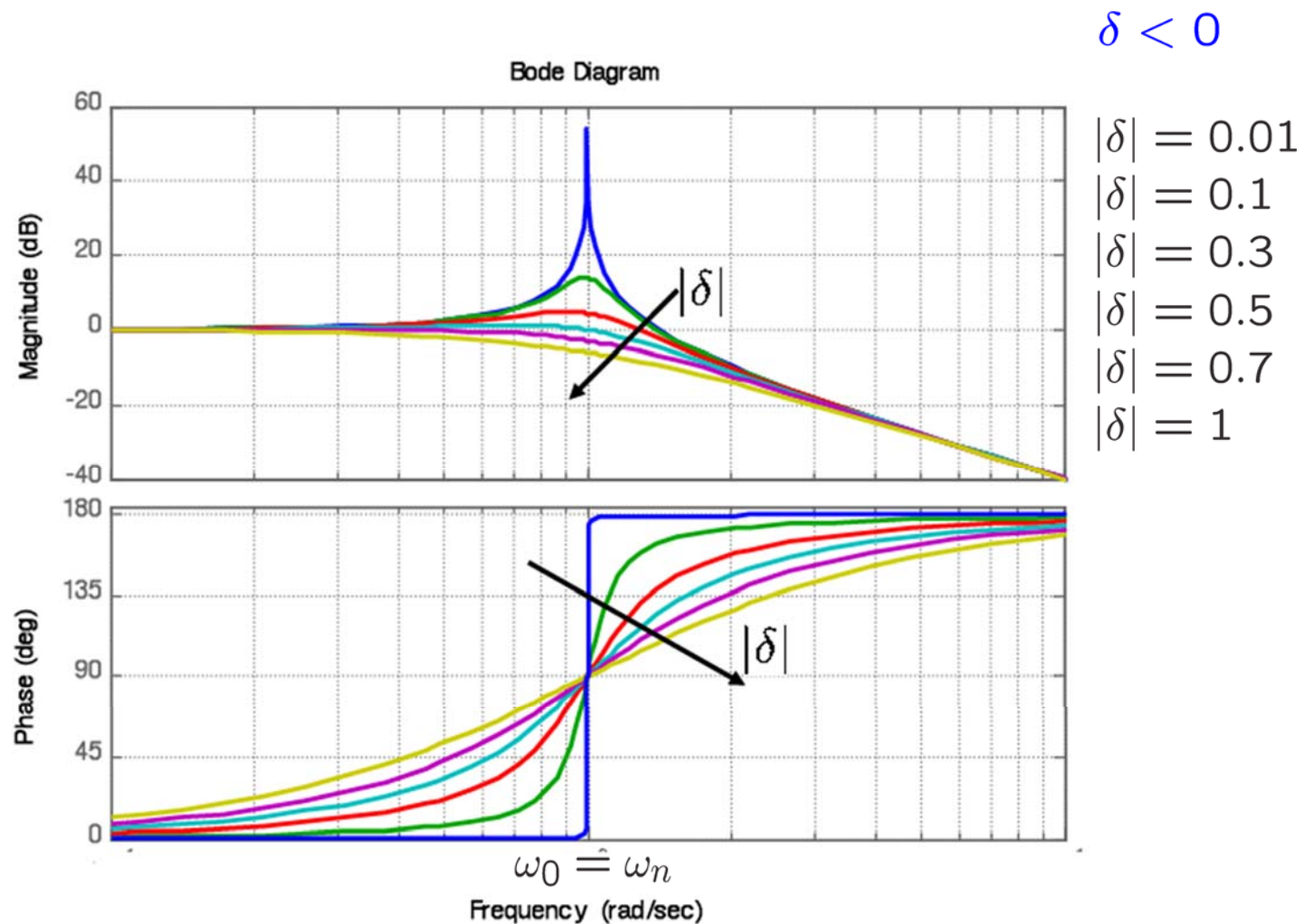
Fase

$$-\arg \left(1 + 2\delta \frac{\omega}{\omega_n} j - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)$$



Poli complessi coniugati

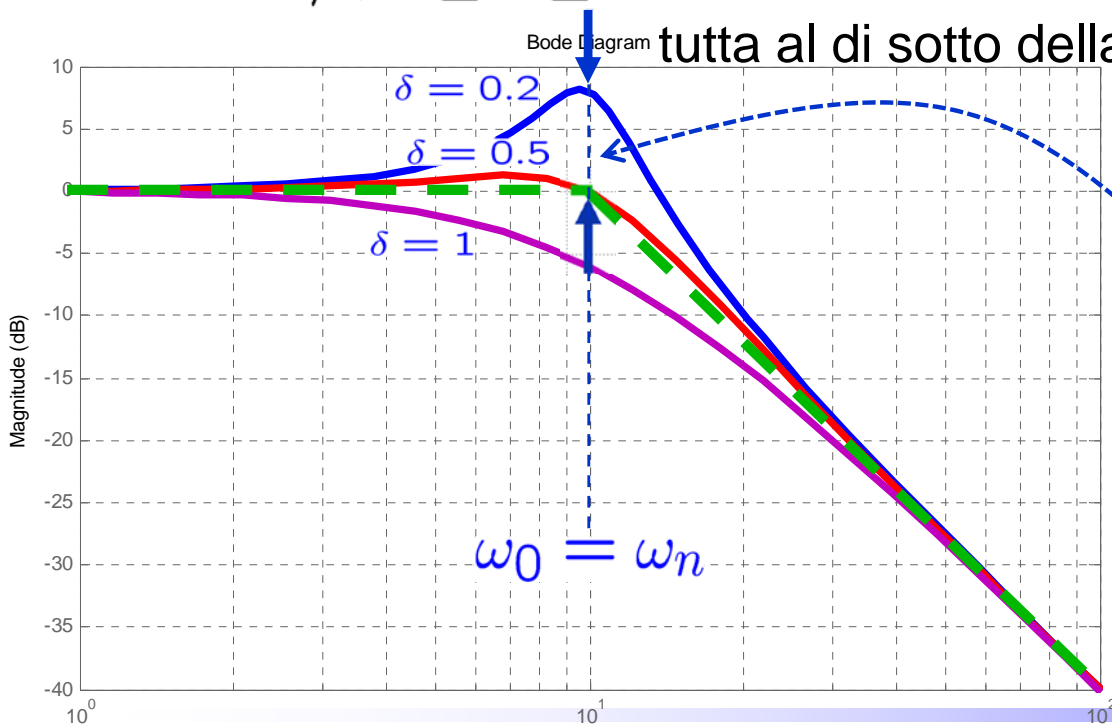
- **Poli cc instabili**: stesso andamento per il diagramma delle ampiezze e ribaltamento rispetto l'asse delle frequenze per il diagramma delle fasi



Poli complessi coniugati: ampiezza

Il diagramma delle ampiezze ha le seguenti proprietà:

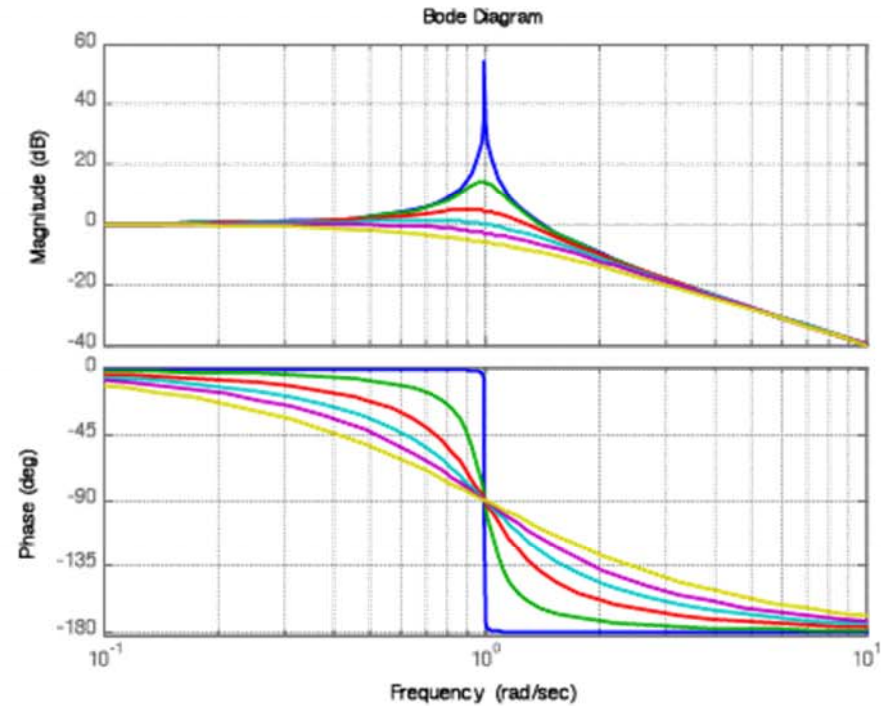
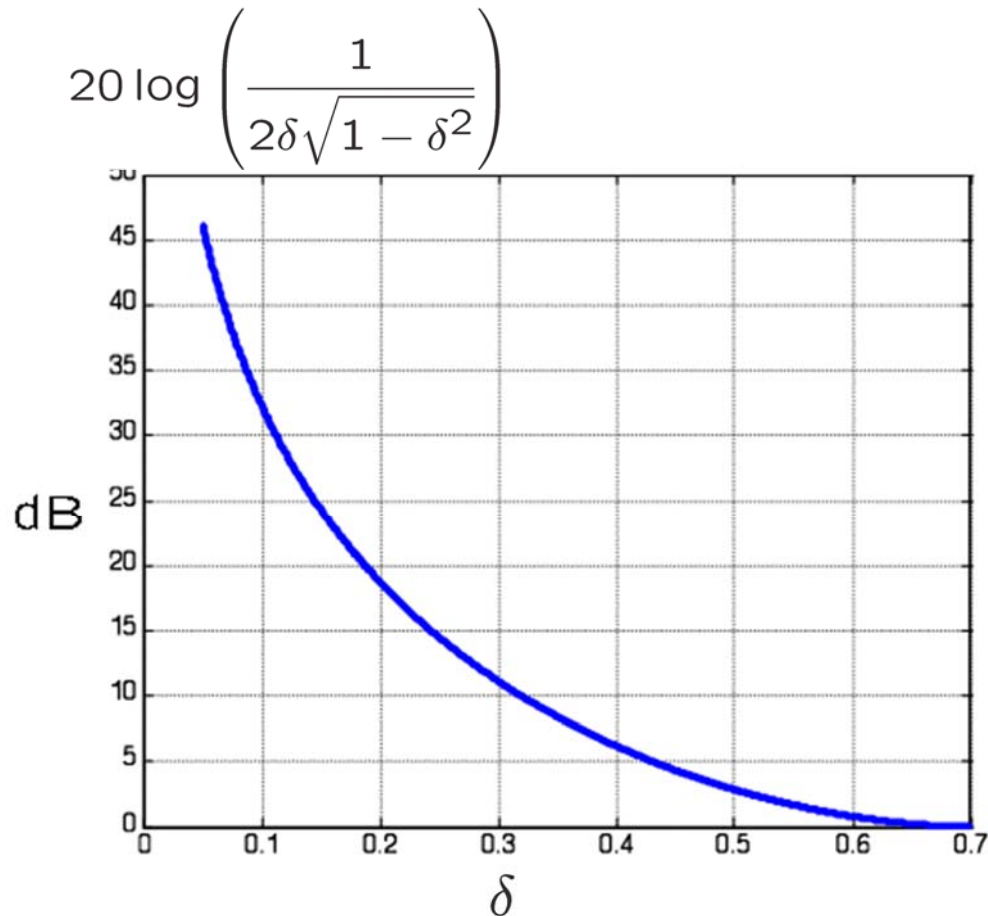
- Per $0 \leq \delta \leq 1/\sqrt{2}$ la curva presenta un massimo;
- Per $0 \leq \delta \leq 1/2$ la curva interseca l'asse delle ascisse a destra del punto $\omega = \omega_n$ ed è pertanto tutta al di sopra della sua approssimazione asintotica;
- Per $1/2 \leq \delta \leq 1/\sqrt{2}$ la curva interseca l'asse delle ascisse a sinistra del punto $\omega = \omega_n$;
- Per $1/\sqrt{2} \leq \delta \leq 1$ la curva non interseca l'asse delle ascisse ed è pertanto tutta al di sotto della sua approssimazione asintotica.



$$M_{\omega_n} = |G(j\omega_n)| = \frac{1}{2\delta}$$

Poli complessi coniugati: risonanza

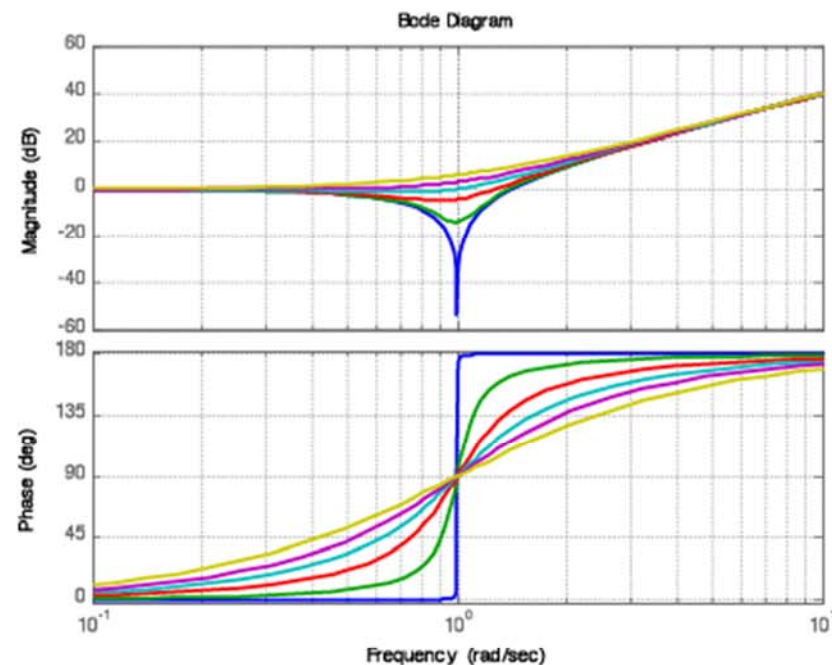
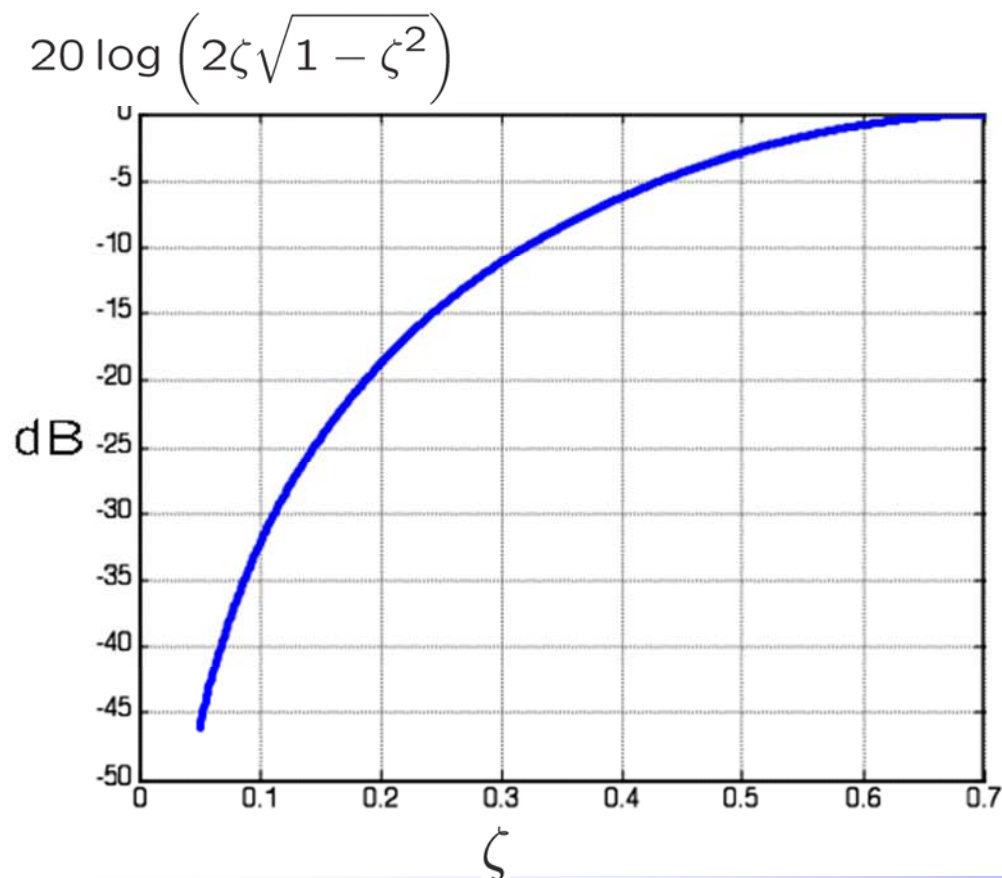
Il valore di picco $M_R = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}}$
alla frequenza $\omega_R = \omega_n\sqrt{1-2\delta^2}$
viene detto **picco di risonanza**



Fisicamente rappresenta il
fattore di amplificazione
massima della coppia di poli a
fronte di sollecitazioni alla
frequenza di risonanza $\omega_R = \omega_n\sqrt{1-2\delta^2}$

Zeri complessi coniugati: risonanza

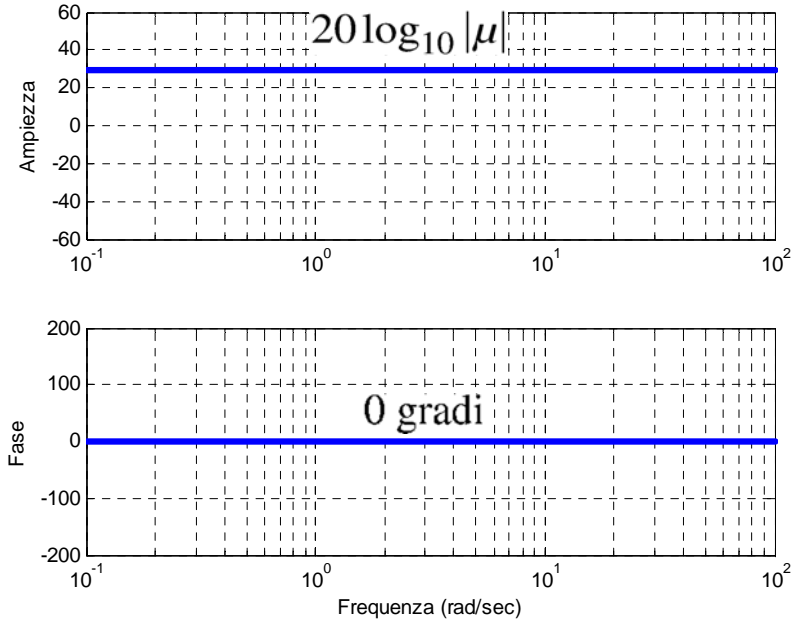
Il valore di minimo $M_R = 2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}$
alla frequenza $\omega_R = \alpha_n\sqrt{1 - 2\zeta^2}$
viene detto **picco di attenuazione**



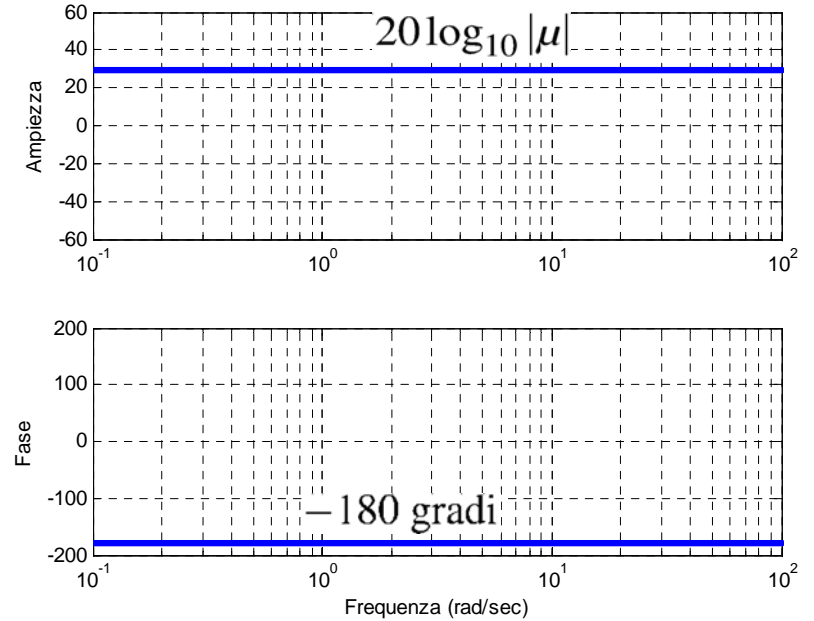
Fisicamente rappresenta il
fattore di attenuazione massima
della coppia di zeri a fronte di
sollecitazioni alla **frequenza di
risonanza** $\omega_R = \alpha_n\sqrt{1 - 2\zeta^2}$

Diagrammi di Bode - tabella riassuntiva

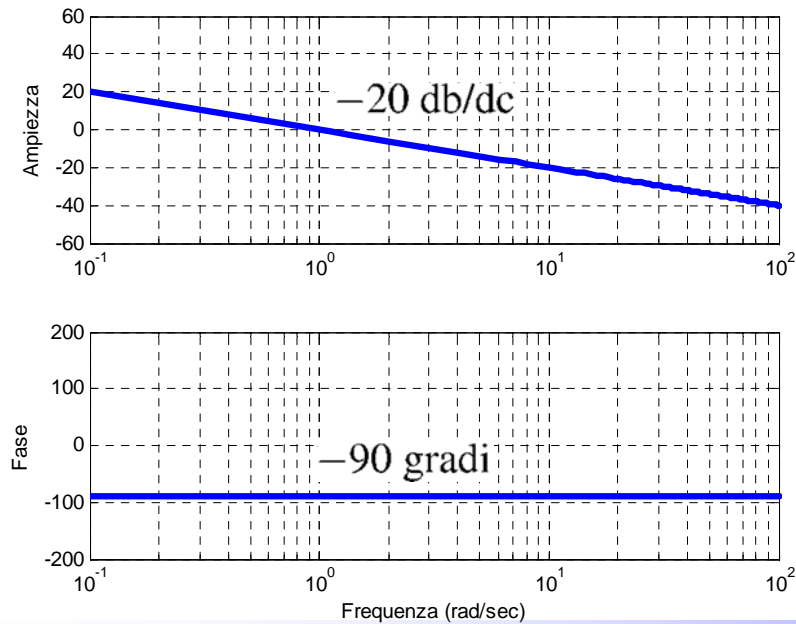
$$G(s) = \mu > 0$$



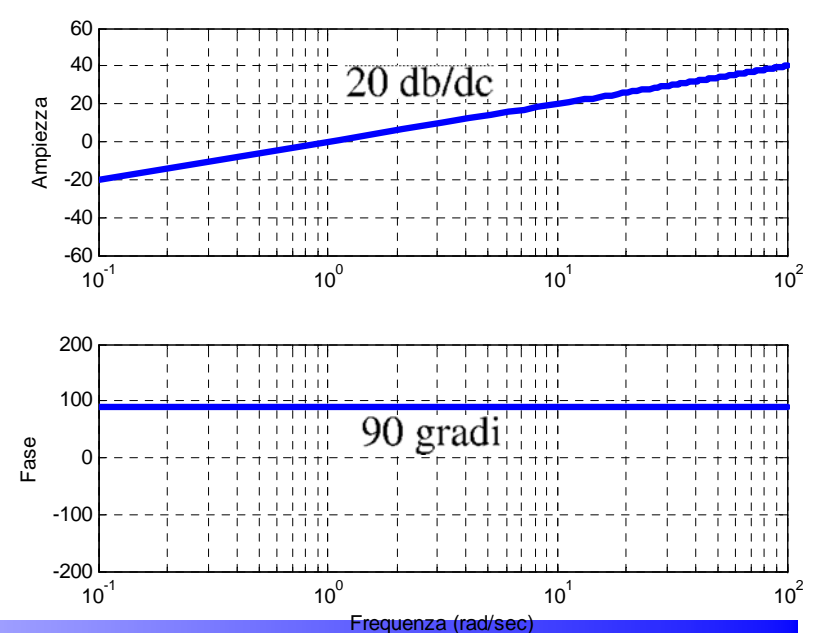
$$G(s) = \mu < 0$$



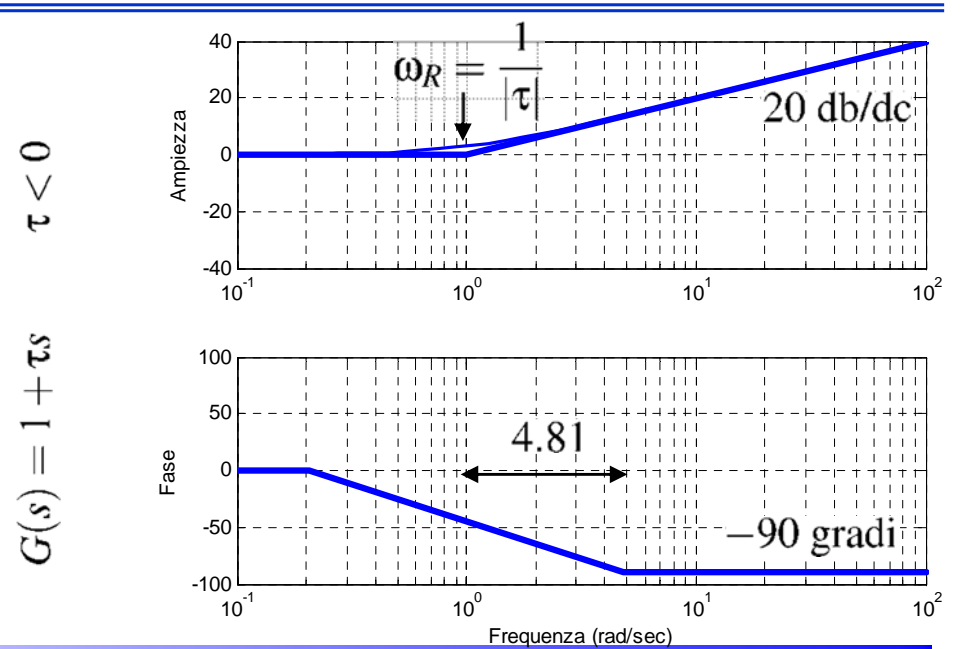
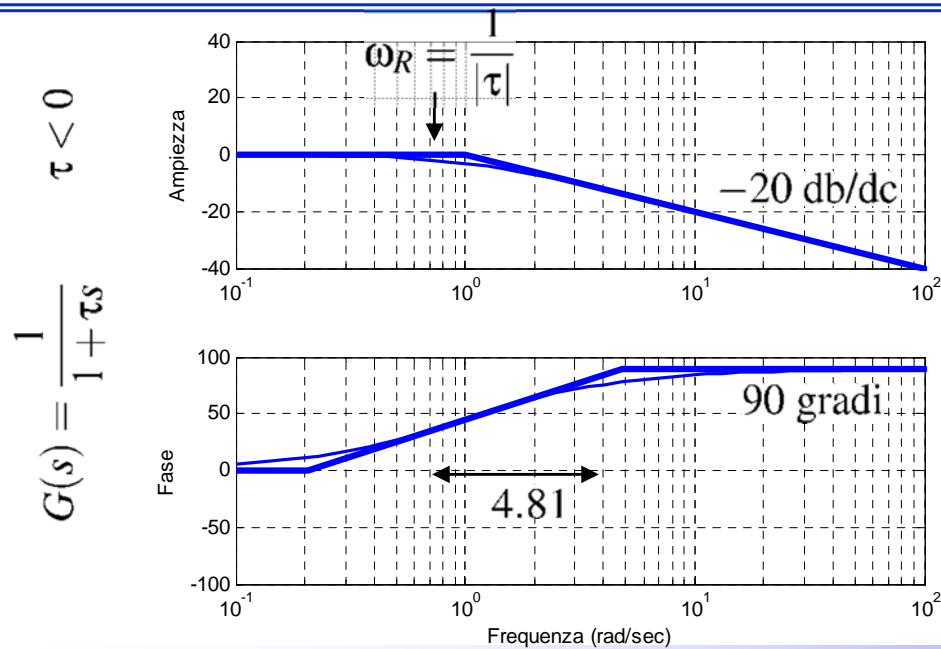
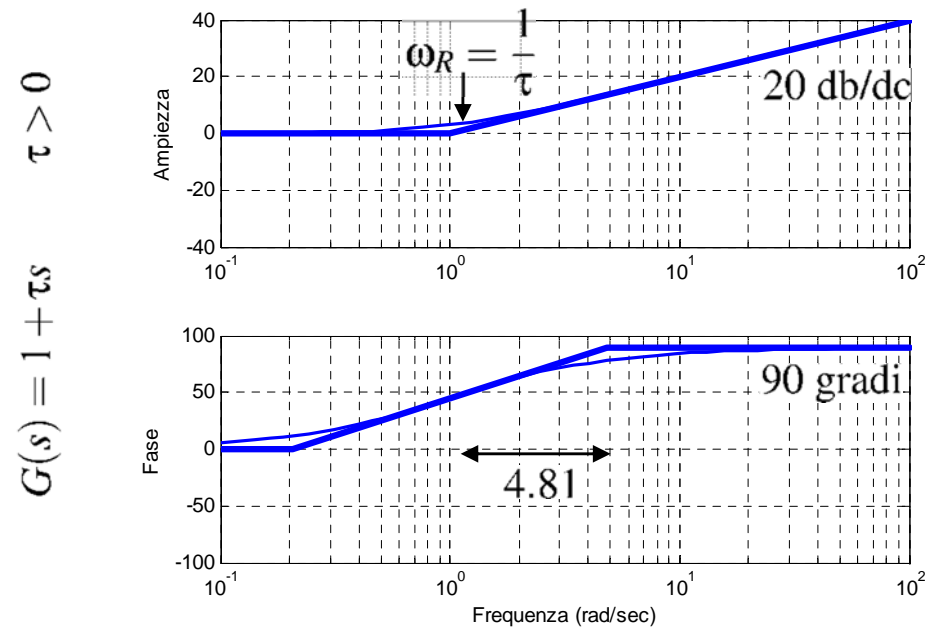
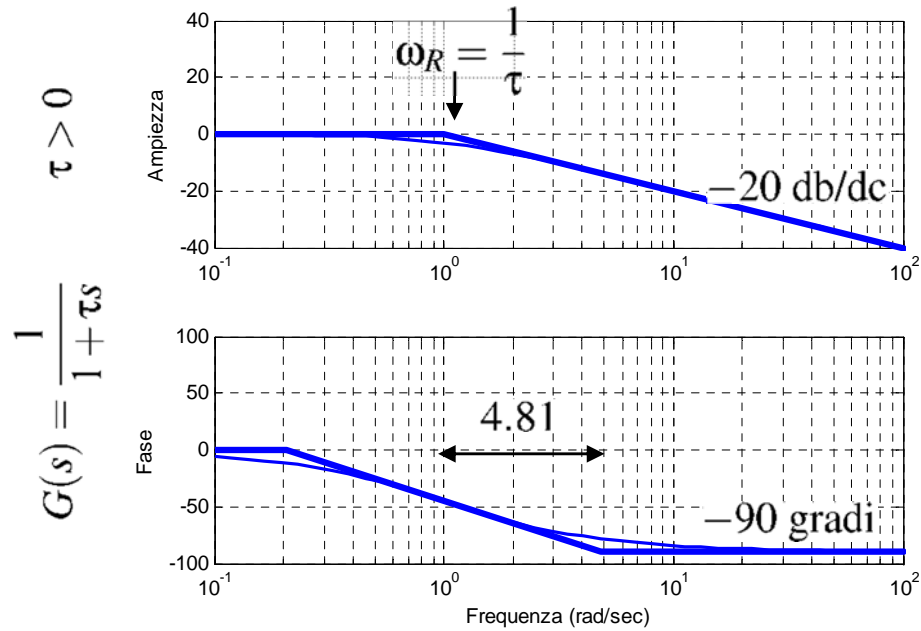
$$G(s) = \frac{1}{s}$$



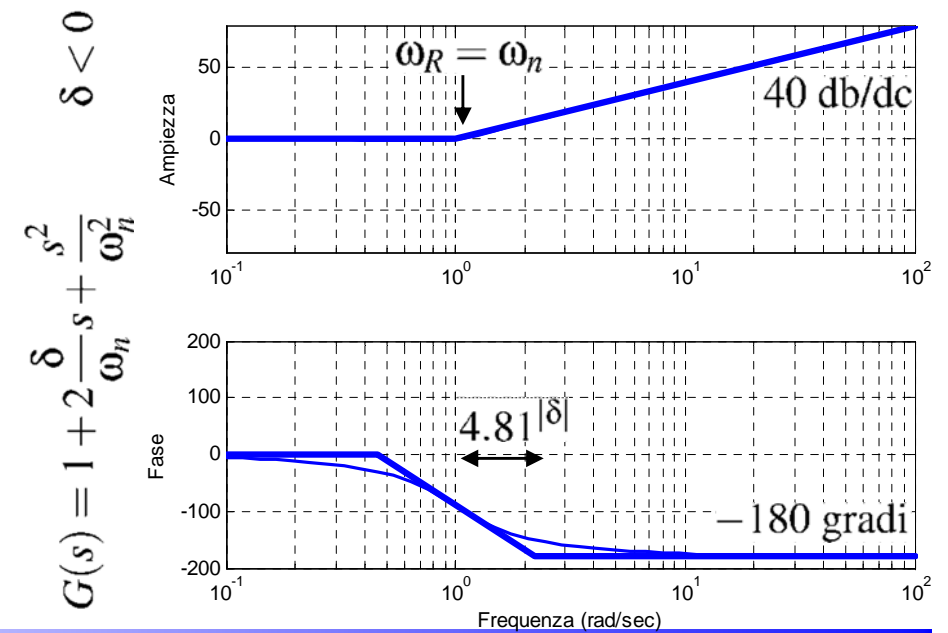
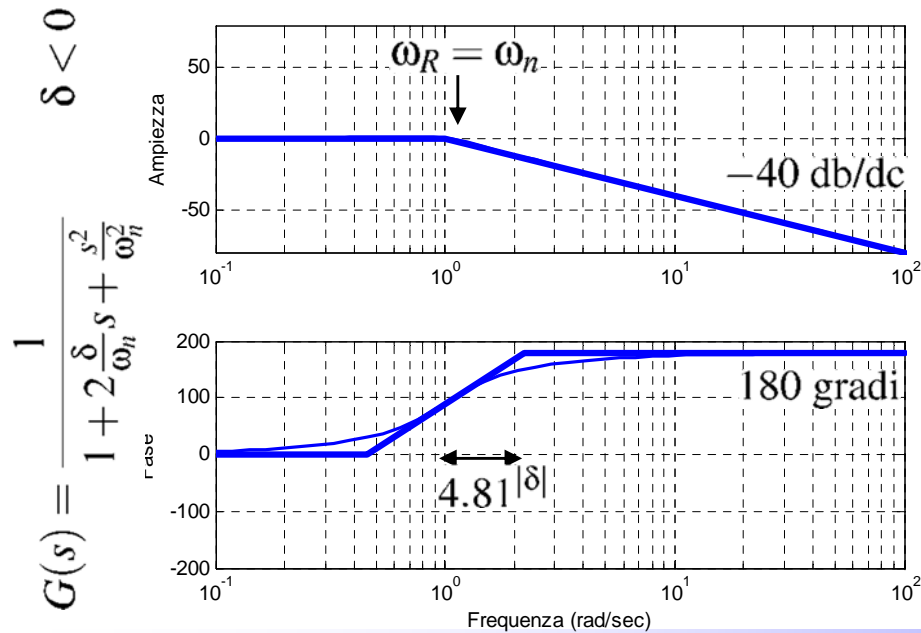
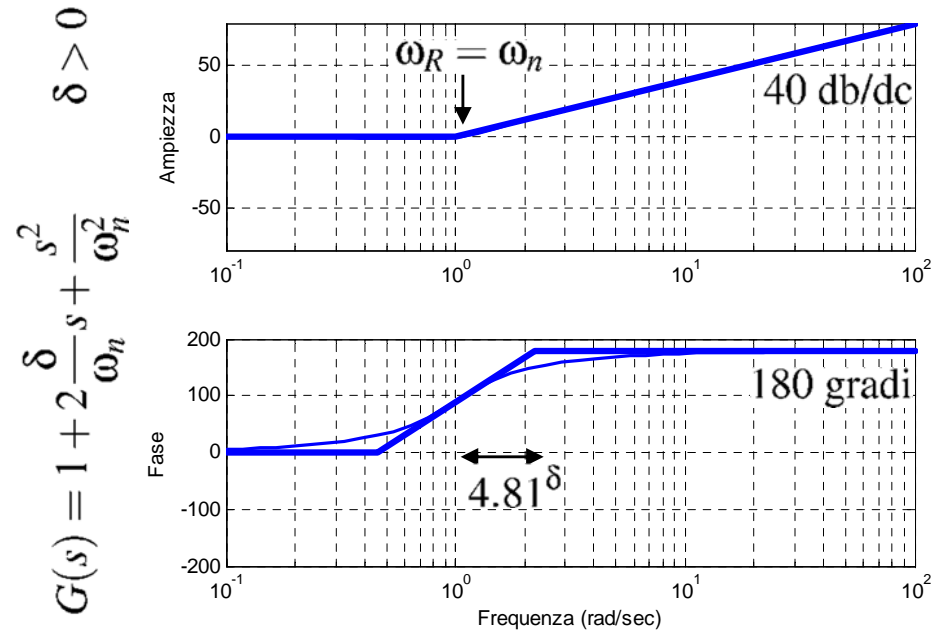
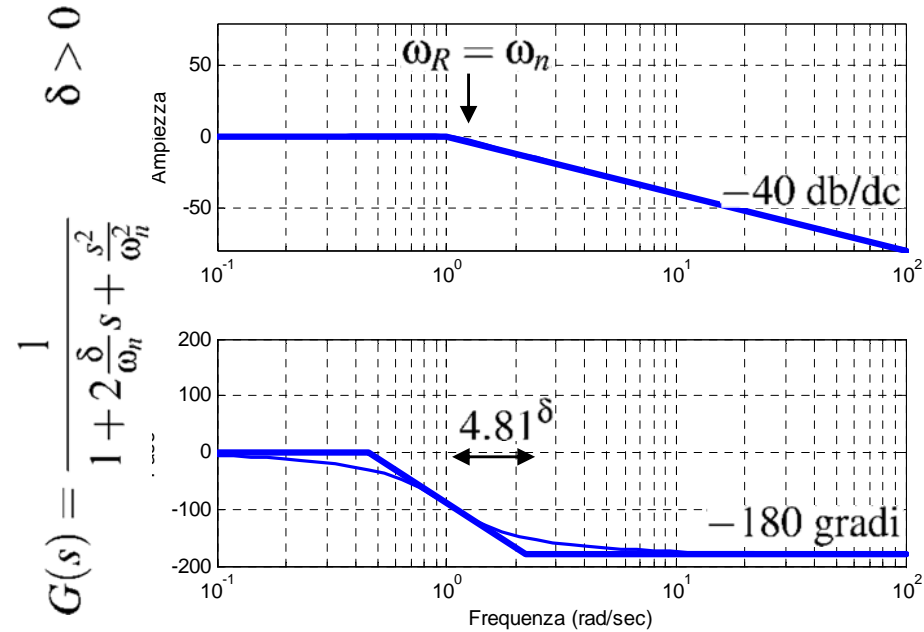
$$G(s) = s$$



Diagrammi di Bode - tabella riassuntiva

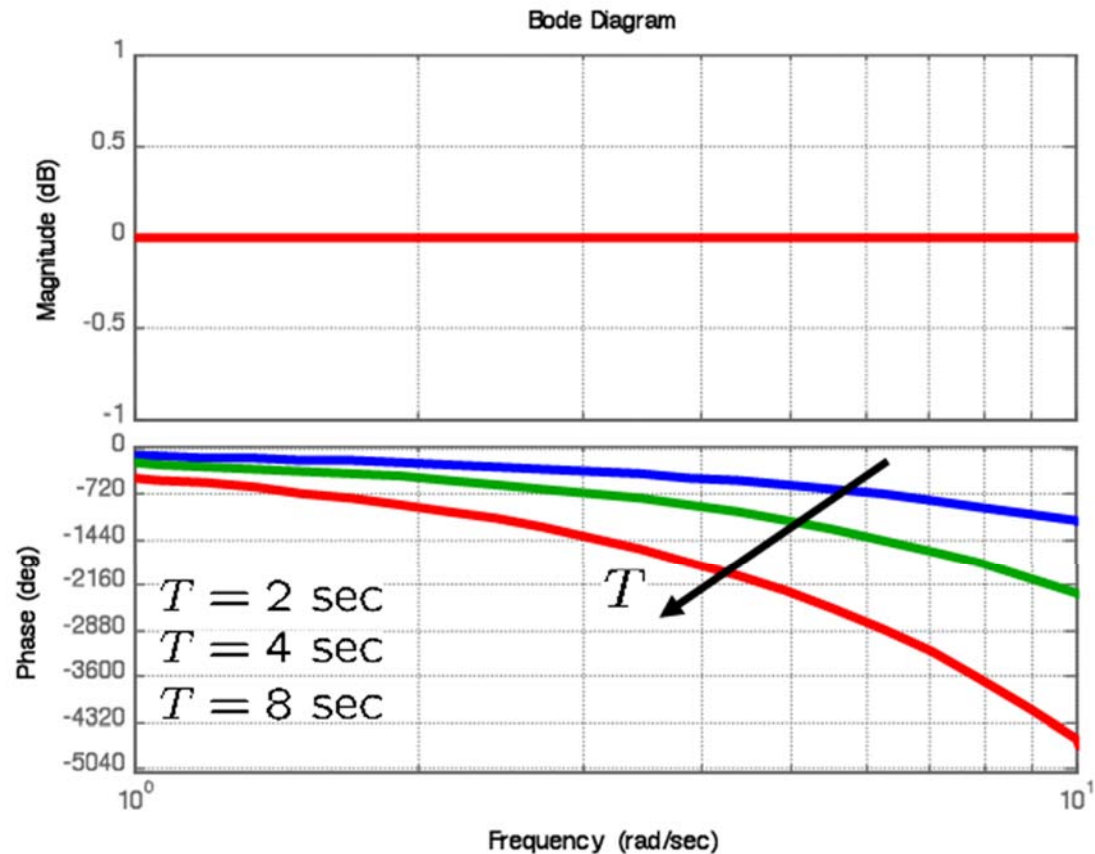


Diagrammi di Bode - tabella riassuntiva



Ritardo temporale

$$e^{-sT} \longrightarrow e^{-j\omega T} \left\{ \begin{array}{l} \text{Modulo } |e^{-j\omega T}| = 1 \\ \text{Argomento } \arg(e^{-j\omega T}) = -\omega T \end{array} \right.$$



CONTROLLI AUTOMATICI

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

<http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti/ControlliAutomatici.html>

Diagrammi di Bode
FINE

Ing. Luigi Biagiotti

e-mail: luigi.biagiotti@unimore.it

<http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti>