**CONTROLLI AUTOMATICI**
**Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo**

http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti/ControlliAutomatici.html

# SISTEMI ELEMENTARI DEL 1º E 2º ORDINE


Ing. Luigi Biagiotti

e-mail: luigi.biagiotti@unimore.it

http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti

# Rappresentazioni di una funzione di trasferimento

- Una funzione di trasferimento espressa in forma polinomiale

$$G(s) = \frac{b_m\, s^m + b_{m-1}\, s^{m-1} + \ldots + b_1\, s + b_0}{a_n\, s^n + a_{n-1}\, s^{n-1} + \ldots + a_1\, s + a_0}$$

può essere riscritta in **forma fattorizzata** come

costante di trasferimento

$$G(s) = \frac{\rho}{s^h} \frac{\prod_k (s - z_k) \prod_i (s^2 + 2\zeta_i \alpha_{n,i} s + \alpha_{n,i}^2)}{\prod_k (s - p_k) \prod_i \underbrace{(s^2 + 2\delta_i \omega_{n,i} s + \omega_{n,i}^2)}}$$

$$\begin{aligned} (s - p_i)(s - p_i^\star) &= (s - (\sigma_i + j\omega_i))(s - (\sigma_i - j\omega_i)) \\ &= s^2 \underbrace{-2\sigma_i}_{2\delta_i \omega_{n,i}} s + \underbrace{\sigma_i^2 + \omega_i^2}_{\omega_{n,i}^2} \end{aligned}$$

- I termini del secondo ordine rappresentano le coppie di zeri/poli complessi coniugati e sono caratterizzati dai parametri
  - $\alpha_{n,i}$, $\omega_{n,i}$ pulsazioni naturali
  - $\zeta_i$, $\delta_i$ coefficienti di smorzamento

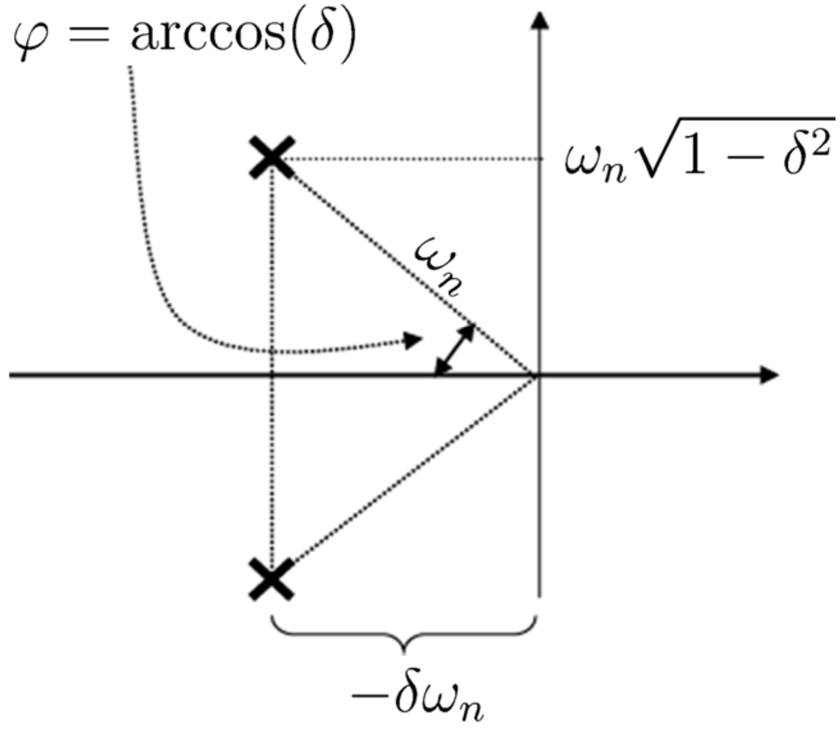
- Parametrizzazione 'polare' di poli/zeri

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= \sigma \pm j\omega \\ &= -\delta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\delta^2} \\ &= -\omega_n \cos\varphi \pm j\omega_n \sin\varphi \end{aligned}$$

con

$$\omega_n = |p_1| = |p_2| = \sqrt{\sigma^2+\omega^2}$$

$$\delta = \cos\varphi = \frac{-\sigma}{\sqrt{\sigma^2+\omega^2}}$$




$$|\delta| \leq 1$$

- Valgono pertanto le seguenti relazioni

$$\sigma = -\delta\omega_n, \qquad \omega = \omega_n\sqrt{1-\delta^2}$$

- Una **forma fattorizzata** alternativa è quella che mette in evidenza le 'costanti di tempo'

guadagno

$$G(s) = \frac{\mu}{s^h} \frac{\prod_k (1 + T_k\, s) \prod_i \left(1 + 2\frac{\zeta_i}{\alpha_{n,i}} s + \frac{s^2}{\alpha_{n,i}^2}\right)}{\prod_k (1 + \tau_k\, s) \prod_i \left(1 + 2\frac{\delta_i}{\omega_{n,i}} s + \frac{s^2}{\omega_{n,i}^2}\right)}$$

dove $T_k = -\frac{1}{z_k}, \tau_k = -\frac{1}{p_k}$ sono le **costanti di tempo** associate agli zeri e ai poli

# Sistemi elementari

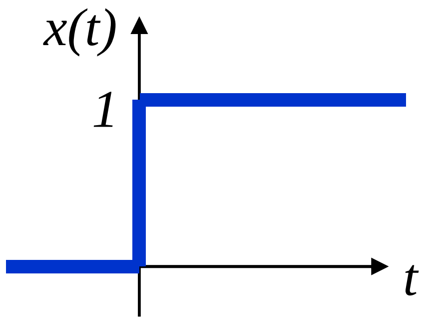
- Come evidenziato discutendo l'antitrasformazione di una generica $Y(s)$ funzione risposta forzata di un sistema dinamico con fdt arbitrariamente complessa può essere ottenuta **sommando** le risposte di sistemi elementari del primo e secondo ordine. Ha quindi senso analizzare l'andamento temporale di sistemi elementari a fronte di **ingressi tipici** (**gradino**) e identificare la relazione esistente tra i parametri della fdt e l'andamento temporale della risposta.

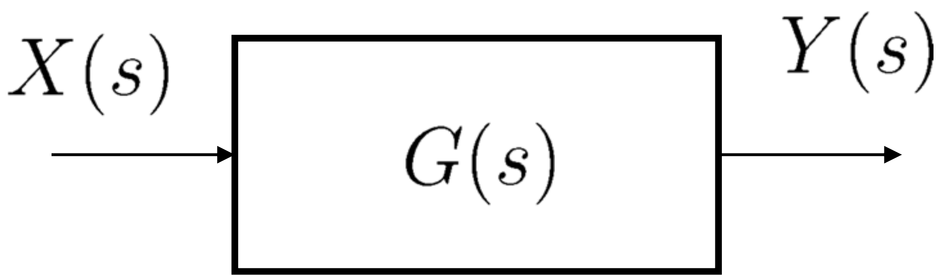
  - Sistemi del primo ordine
  - Sistemi del secondo ordine
  - Effetto degli zeri
  - Luoghi a sovraelongazione e tempo di assestamento costante

# Sistemi elementari

## Risposta a gradino:

- Viene usato come segnale d'ingresso u(t) un gradino unitario




- Se il gradino non fosse unitario ma di ampiezza $K$, la risposta sarebbe la stessa moltiplicata per $K$ (linearità):

$$Y_K(s) = G(s)\, K\, X(s) = K\, G(s)\, U(s) = K\, Y(s)$$

# Sistemi elementari – Primo ordine

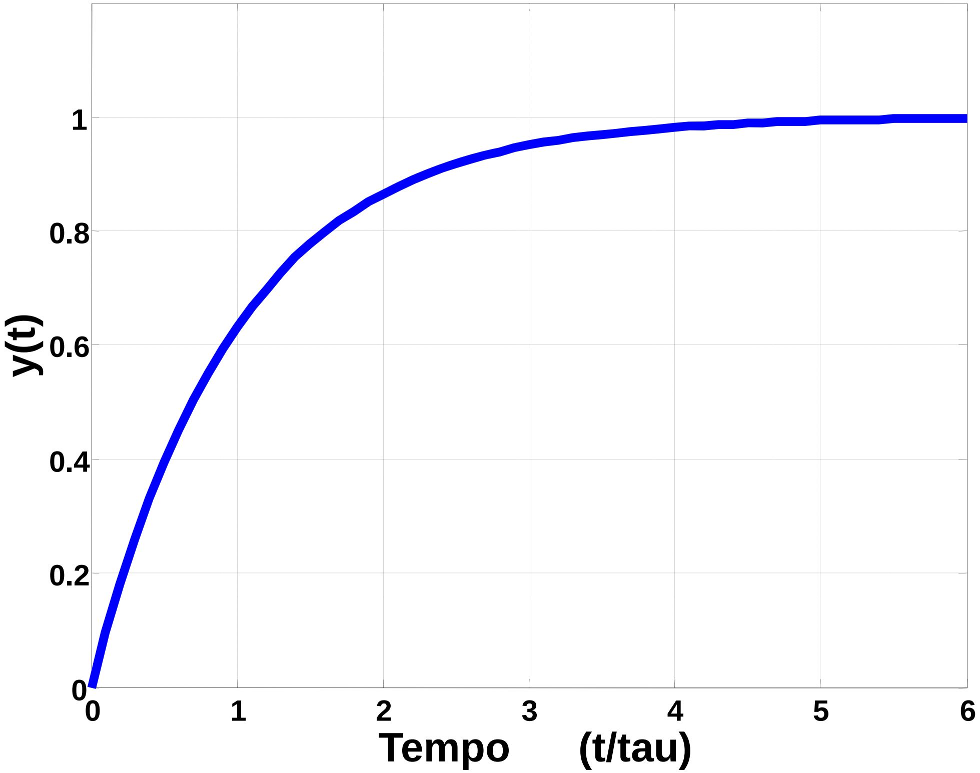
- Un **sistema elementare del primo ordine** è caratterizzato da una funzione di trasferimento che, a meno di un fattore costante, si può porre nella forma

$$G(s) = \frac{1}{1 + \tau\, s}$$

in cui la costante di tempo $\tau$ costituisce il parametro che caratterizza il comportamento dinamico.

- La risposta al **gradino unitario** è data da

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(1+\tau\, s)\, s}\right] \\ &= 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned}$$



# Sistemi elementari – Primo ordine

- **Sistema elementare del primo ordine**

$$G(s) = \frac{1}{1+\tau\, s}$$

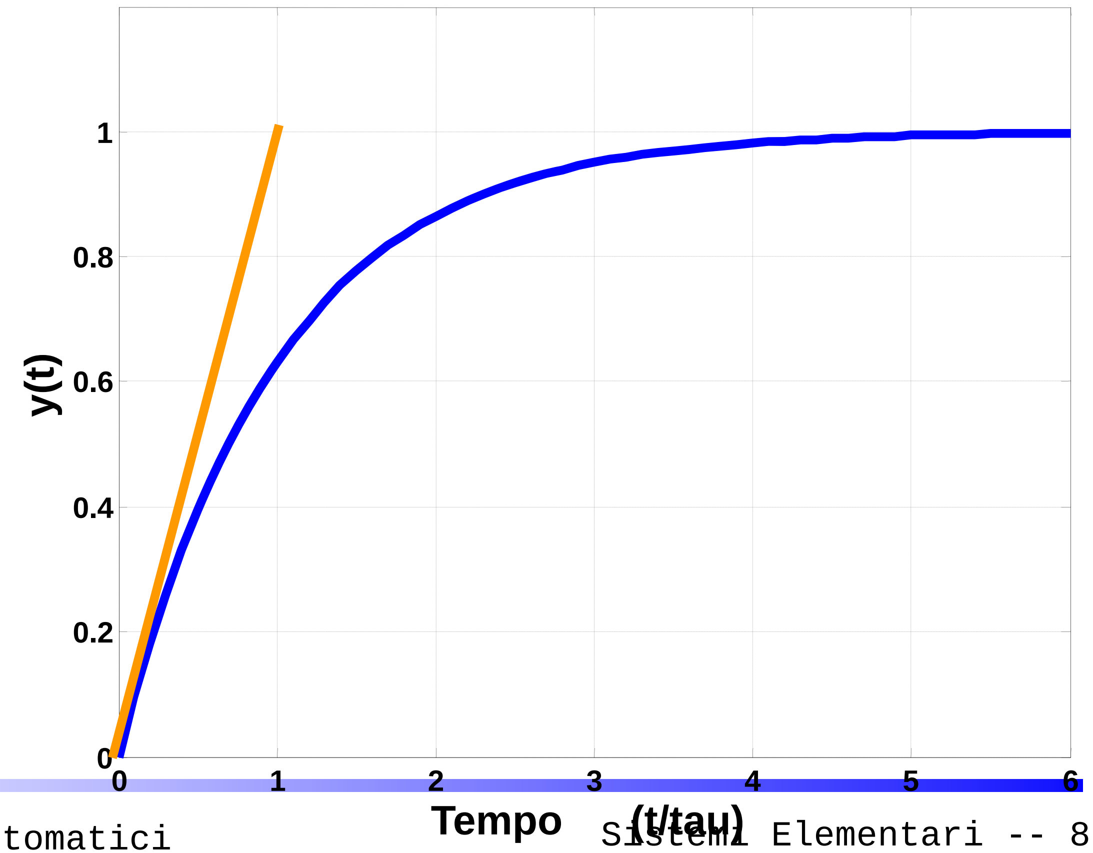
- Per la risposta a gradino, si ha:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(1+\tau\, s)\, s}\right] = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$y(0) = 0$$

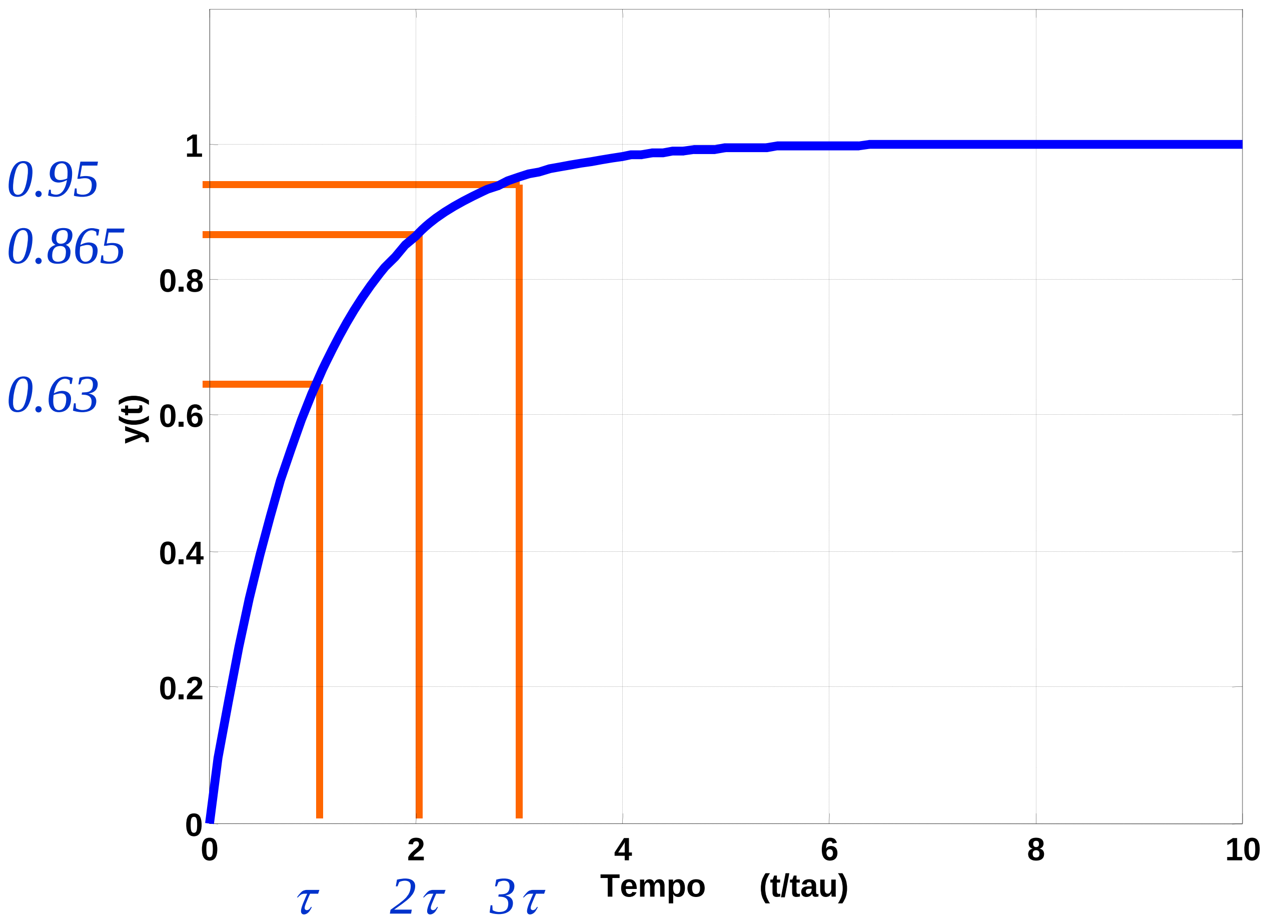
$$\frac{d\, y(0)}{d\, t} = \frac{1}{\tau}$$

- Cioè il valore iniziale è nullo e la pendenza (tangente) vale $1/\tau$: per $t = \tau$ la tangente assume il valore di regime



# Sistemi elementari – Primo ordine

## Risposta di un sistema del primo ordine

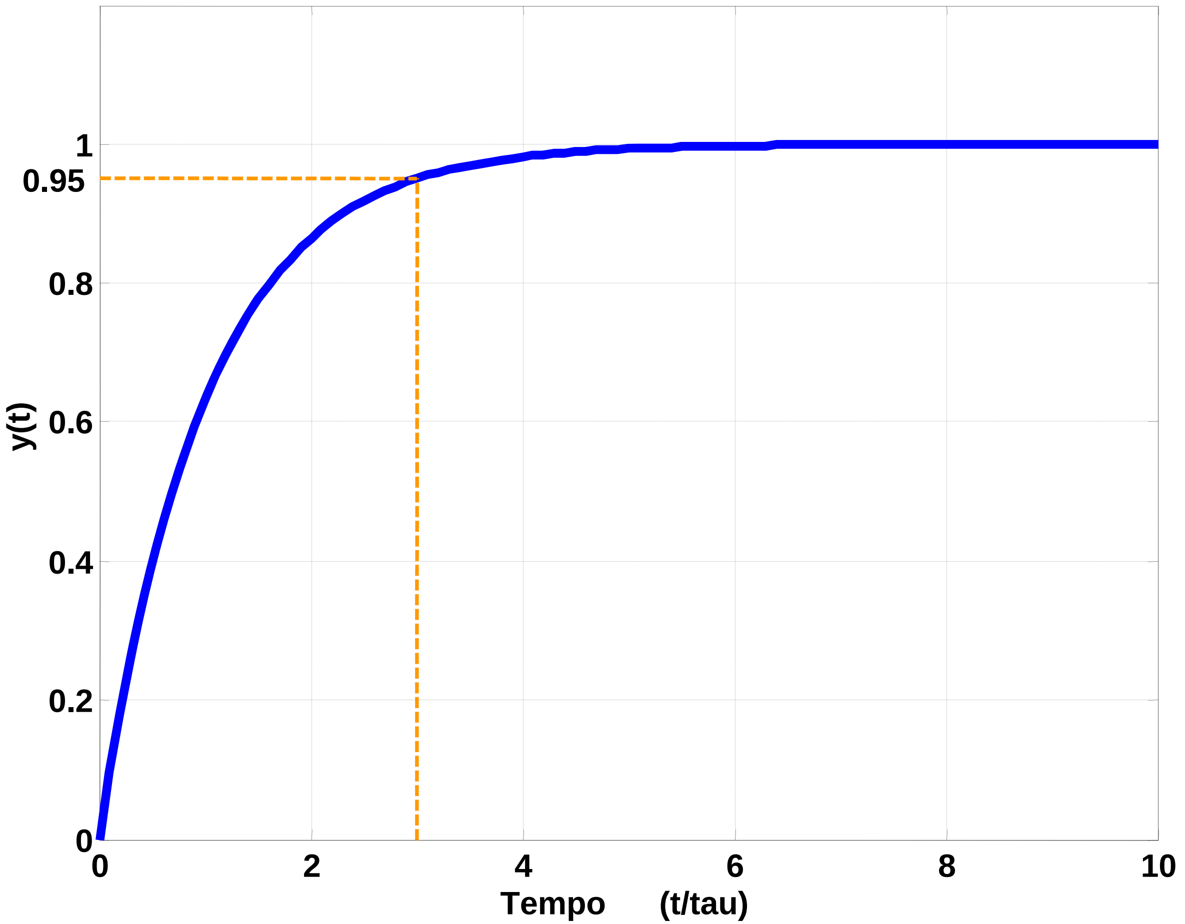



- per t = $\tau$ la risposta assume un valore pari al 63,2 % del valore finale di regime,
- per t = 2 $\tau$ il valore è pari all'86,5% del valore di regime,
- per t = 3$\tau$ si raggiunge il 95,0% del valore di regime.

# Sistemi elementari – Primo ordine

- ***Tempo di assestamento*** tempo occorrente perché l'uscita rimanga entro il 5% del valore finale.

$$T_a \approx 3\tau$$

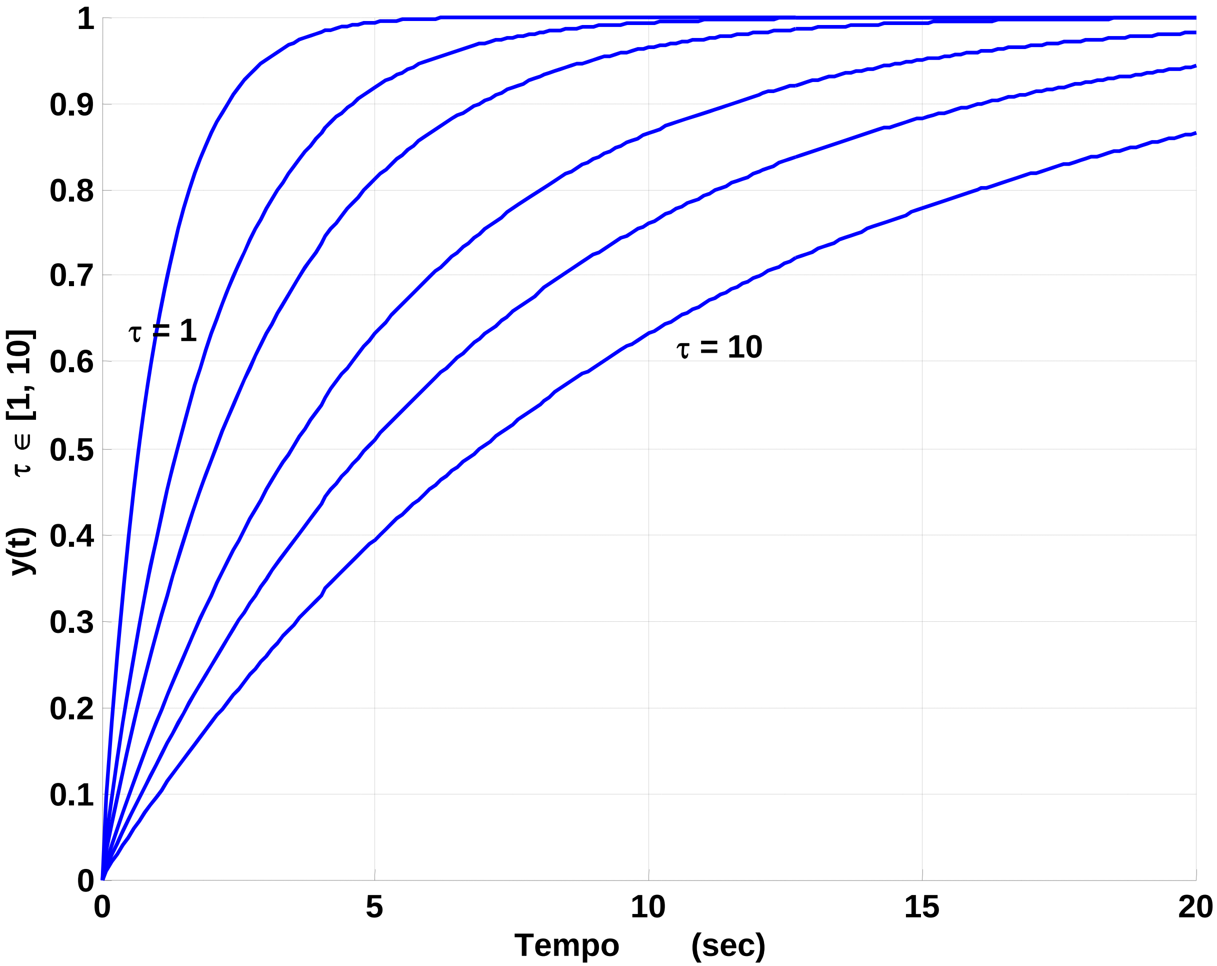


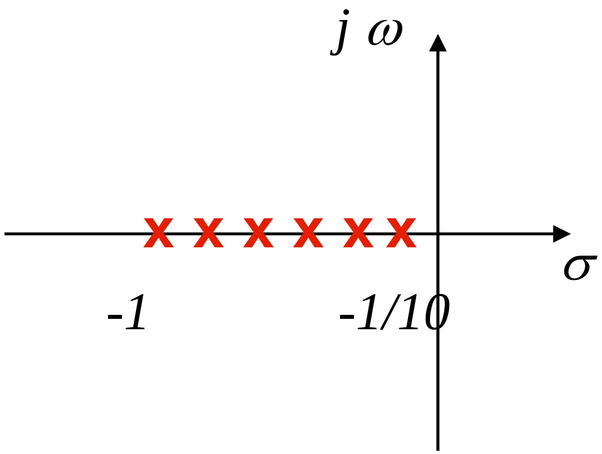

Per t = 5 τ si raggiunge il 99,3% del valore di regime.

Per t = 7τ si raggiunge il 99,91 % del valore di regime, cioè l'assestamento residuo rimane inferiore all'un per mille.

- Al variare di $\tau$ varia la velocità di risposta del sistema
- Se $\tau \uparrow \Longrightarrow T_a \uparrow$

$$G(s) = \frac{1}{1+\tau\, s}$$ polo del sistema in $p = -\frac{1}{\tau}$




**Poli più a "sinistra" ($\tau$ piccoli) corrispondono a risposte "più veloci".**

# Sistemi elementari – Primo ordine con zero

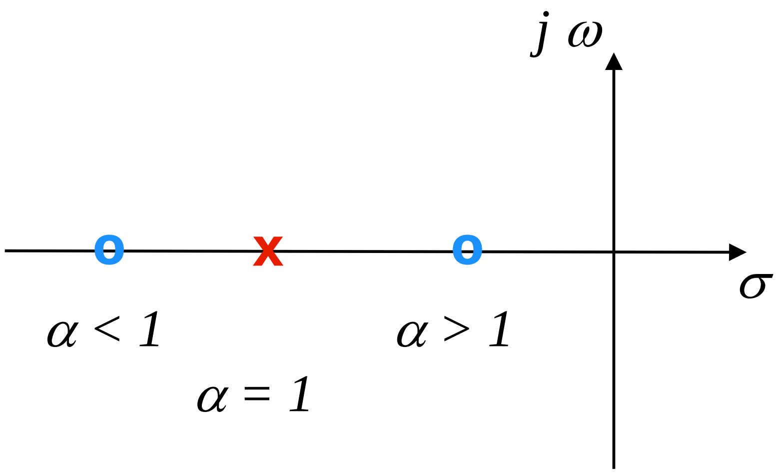
- Se oltre al polo vi è anche uno zero (sistema proprio)

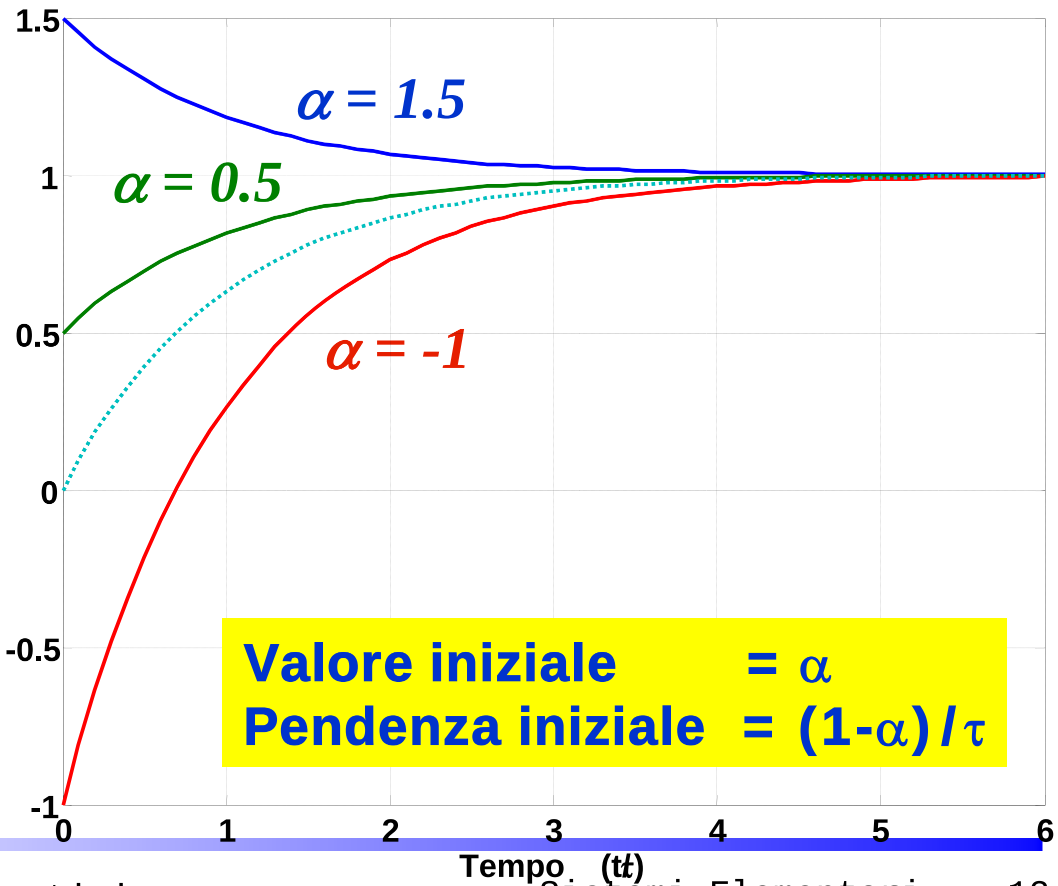
$$G(s) = \frac{1 + T\,s}{1 + \tau\,s} \quad = \quad \frac{T}{\tau} + \frac{1 - T/\tau}{1 + \tau s} = \alpha + \frac{1 - \alpha}{1 + \tau s}$$

- La risposta a gradino è data da

$$y(t) = 1 + (\alpha - 1)e^{-t/\tau}$$

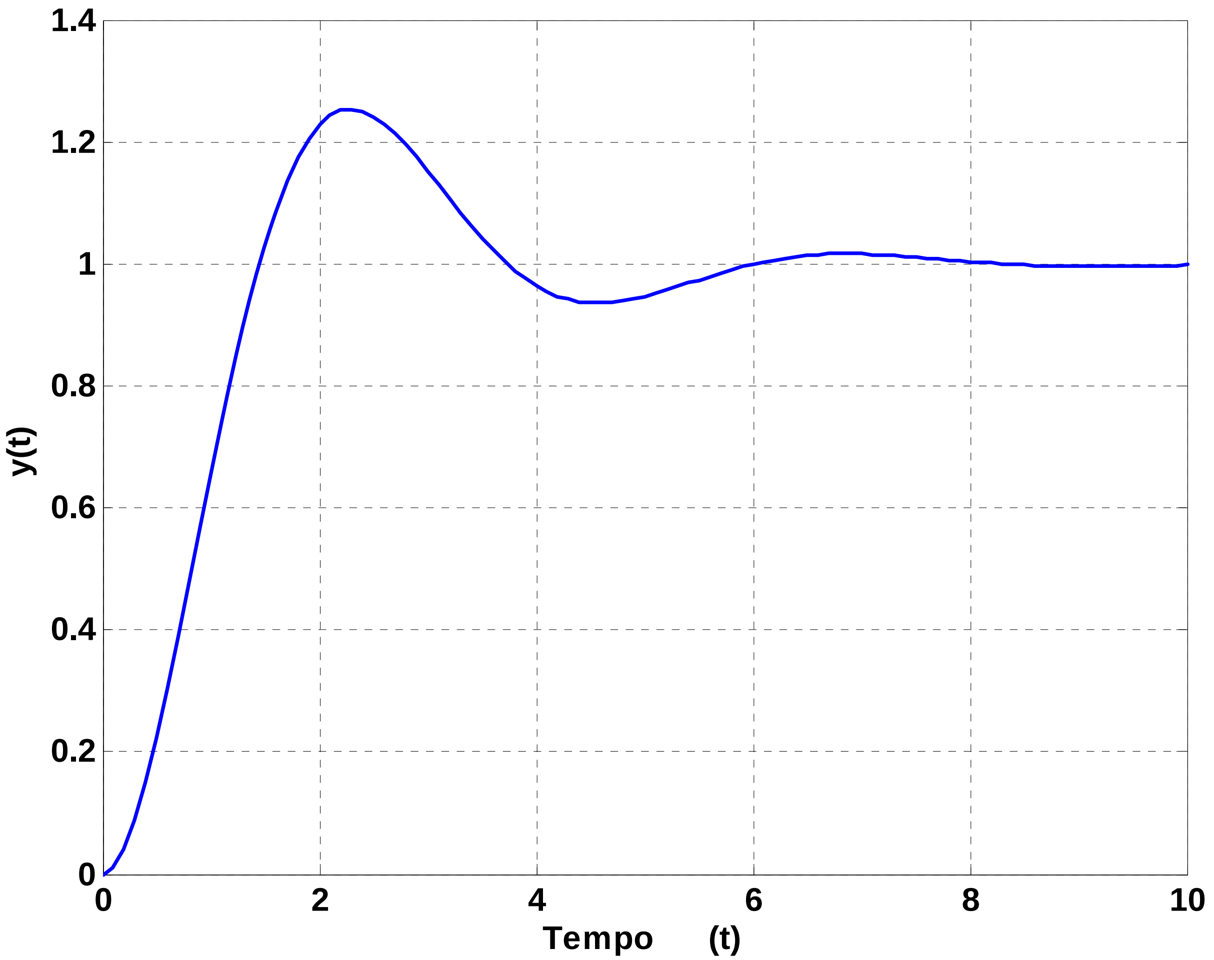
Essendo $\alpha = T/\tau$ il rapporto tra le costanti di tempo dello zero e del polo ($p = \alpha\, z$)



# Sistemi elementari – Secondo ordine

- Per le specifiche riguardanti la risposta al gradino (segnale tipico più frequentemente impiegato) si fa riferimento ad un andamento della risposta analogo a quello di un sistema del secondo ordine con poli complessi, cioè di tipo oscillatorio smorzato.



# Sistemi elementari – Secondo ordine

- I parametri più importanti, sui quali si può basare una misura della qualità del transitorio di un sistema del secondo ordine sono:

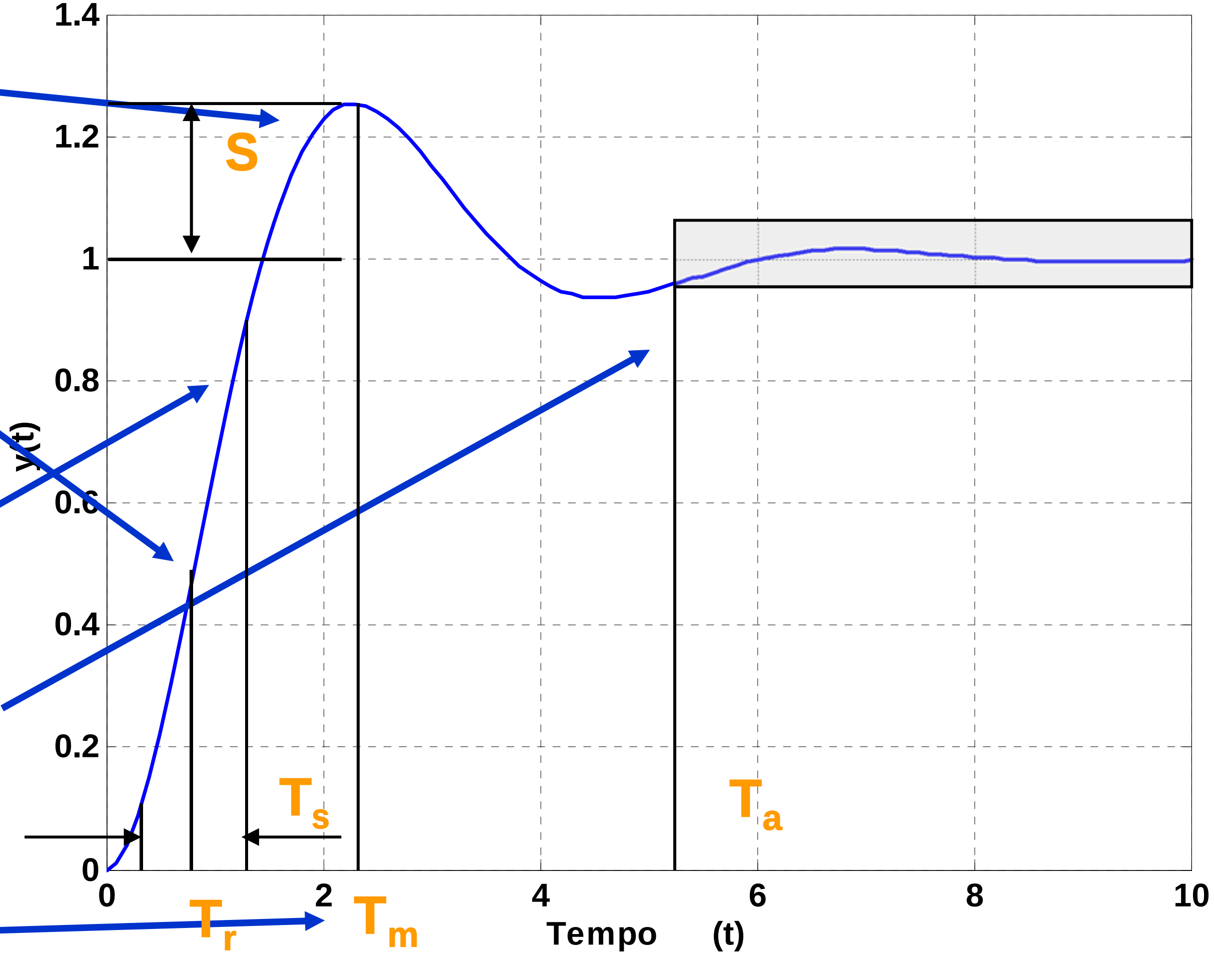
***Massima sovraelongazione*** (o **massimo sorpasso**) **S**: differenza fra il valore massimo raggiunto dall'uscita e il valore finale; normalmente si esprime in % del valore finale.

***Tempo di ritardo*** $T_r$: tempo per raggiungere il 50% del valore finale.

***Tempo di salita*** $T_s$: tempo occorrente perchè l'uscita passi dal 10 al 90% del valore finale.

***Tempo di assestamento*** $T_a$: tempo occorrente perché l'uscita rimanga entro il ± 5% del valore finale.

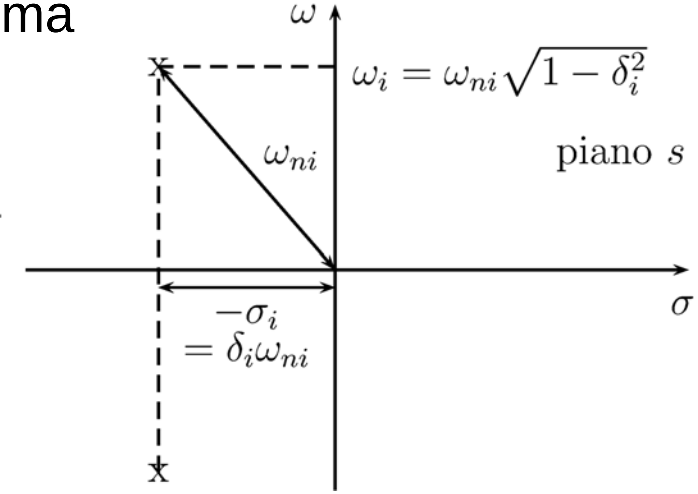
***Istante di massima sovraelongazione*** $T_m$: istante al quale si presenta la massima sovraelongazione.



# Sistemi elementari – Secondo ordine

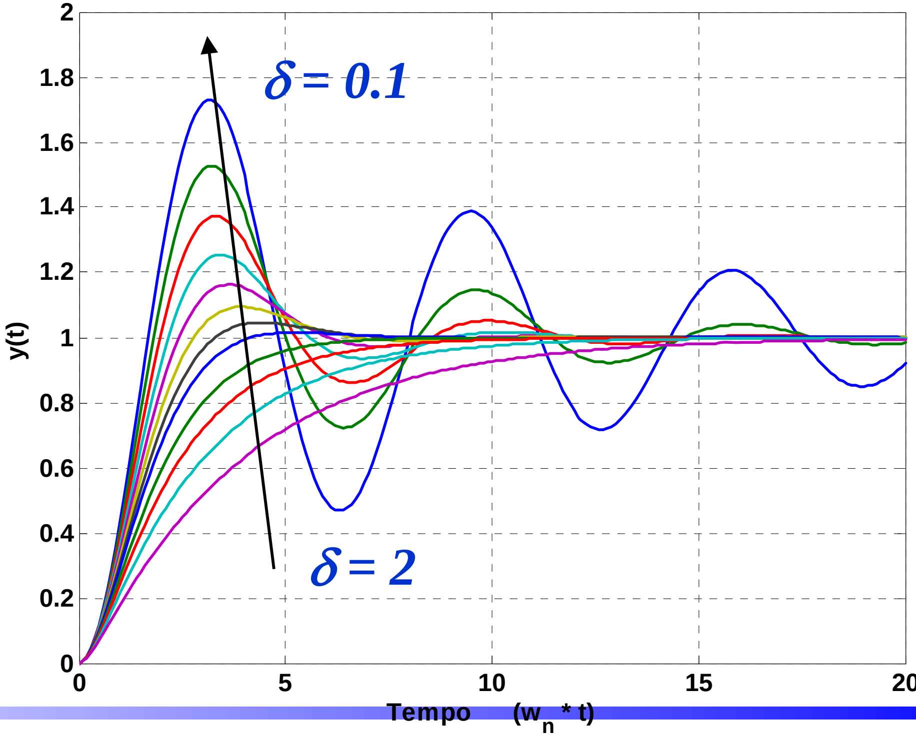
- Per il tipico sistema del secondo ordine, la cui funzione di trasferimento, a meno di un fattore costante, si può porre nella forma

$$G(s) = \frac{1}{1 + 2\,\delta\,\frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\,\delta\,\omega_n\,s + \omega_n^2}$$




I parametri definiti in precedenza dipendono dalla posizione dei poli nel piano complesso, legata a sua volta ai valori:

- del *coefficiente di smorzamento* $\delta$
- della *pulsazione naturale* $\omega_n$.



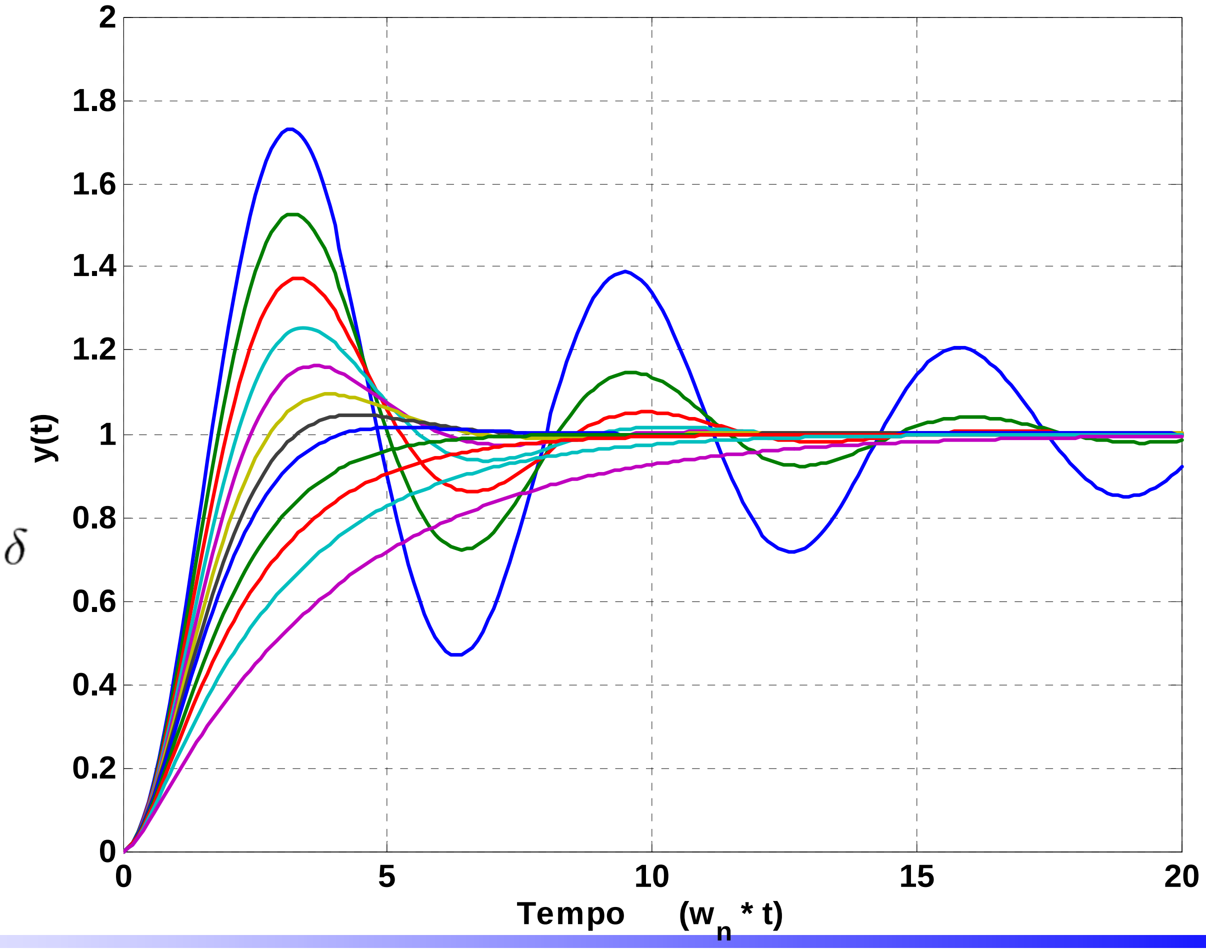
# Sistemi elementari – Secondo ordine

La risposta al gradino unitario è data dalla relazione

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_n^2}{s\,(s^2 + 2\,\delta\,\omega_n\,s + \omega_n^2)}\right] = 1 - A\,e^{-\delta\omega_n t}\ \mathrm{sen}\,(\omega\,t + \varphi)$$

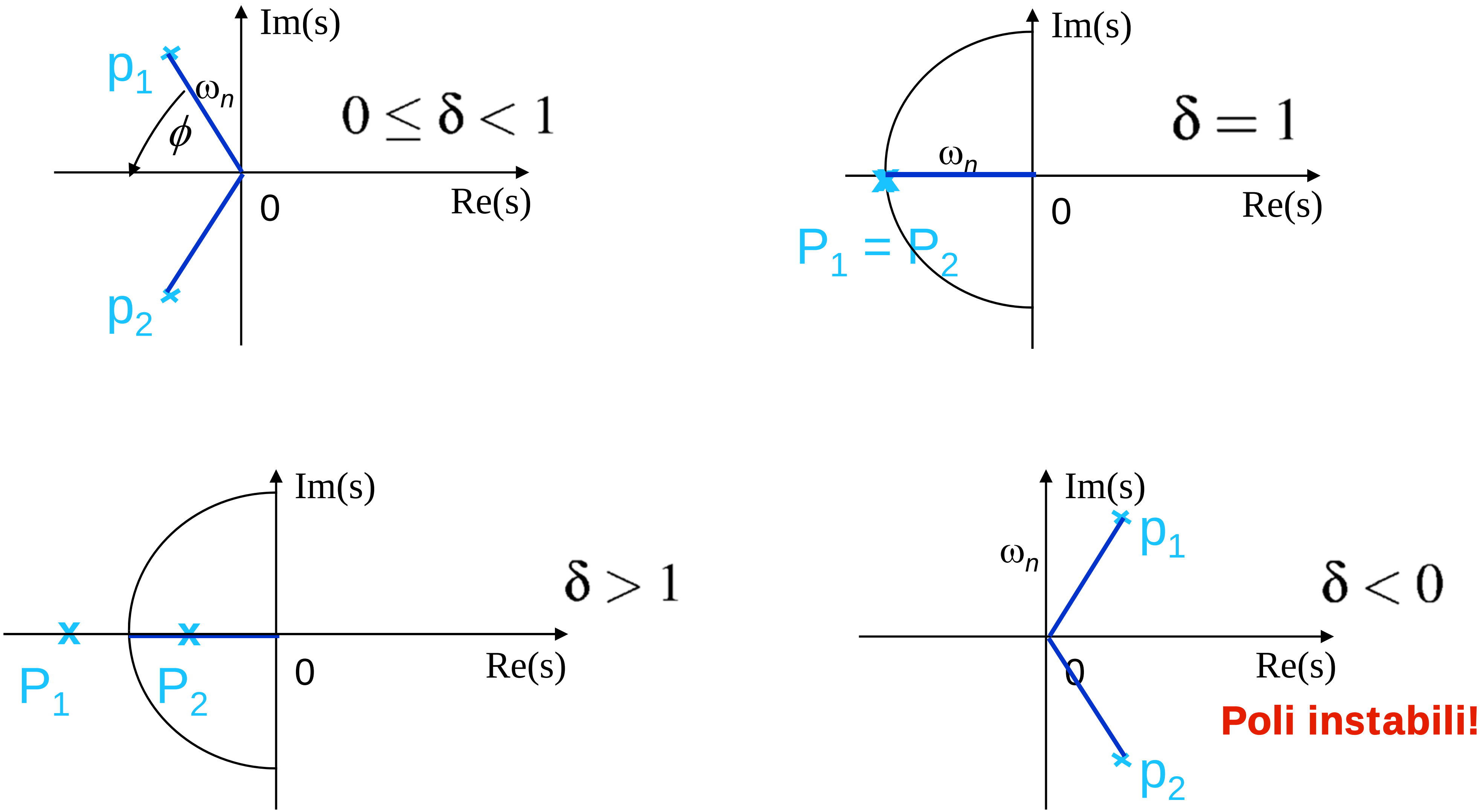
dove:

$$\begin{aligned}
A &:= \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}},\\
\omega &:= \omega_n\sqrt{1-\delta^2},\\
\varphi &:= \arctan\frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}\\
&= \mathrm{arcsen}\sqrt{1-\delta^2} = \arccos\delta
\end{aligned}$$



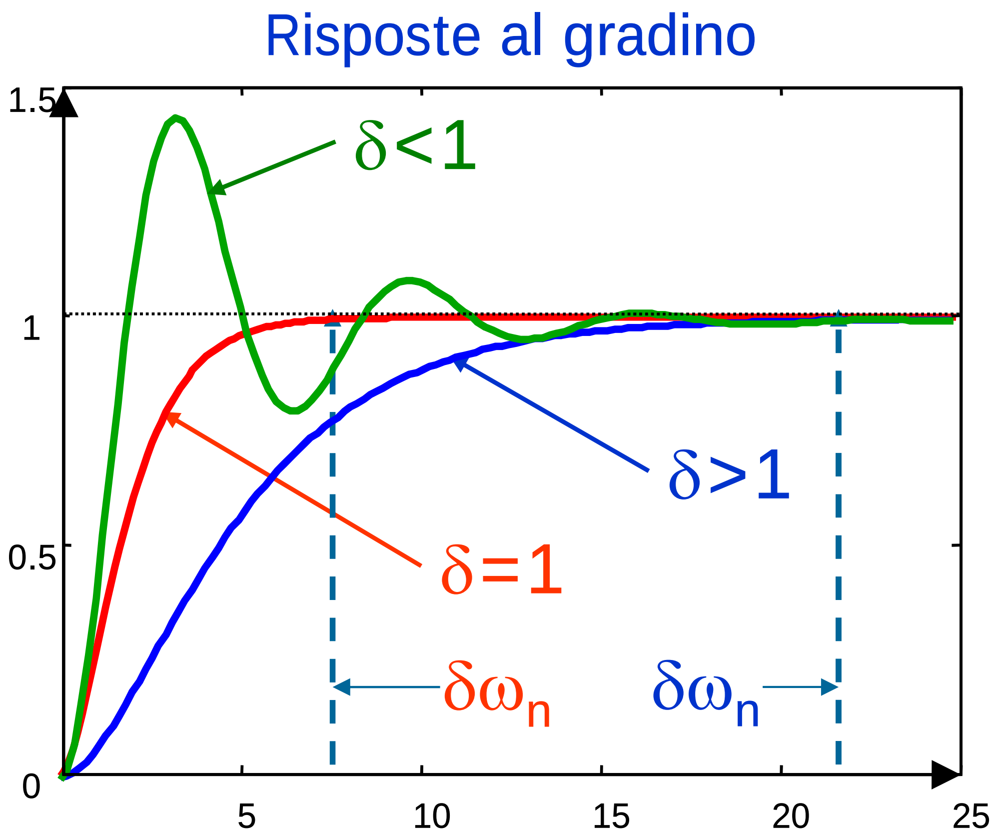
# Sistemi elementari – Secondo ordine

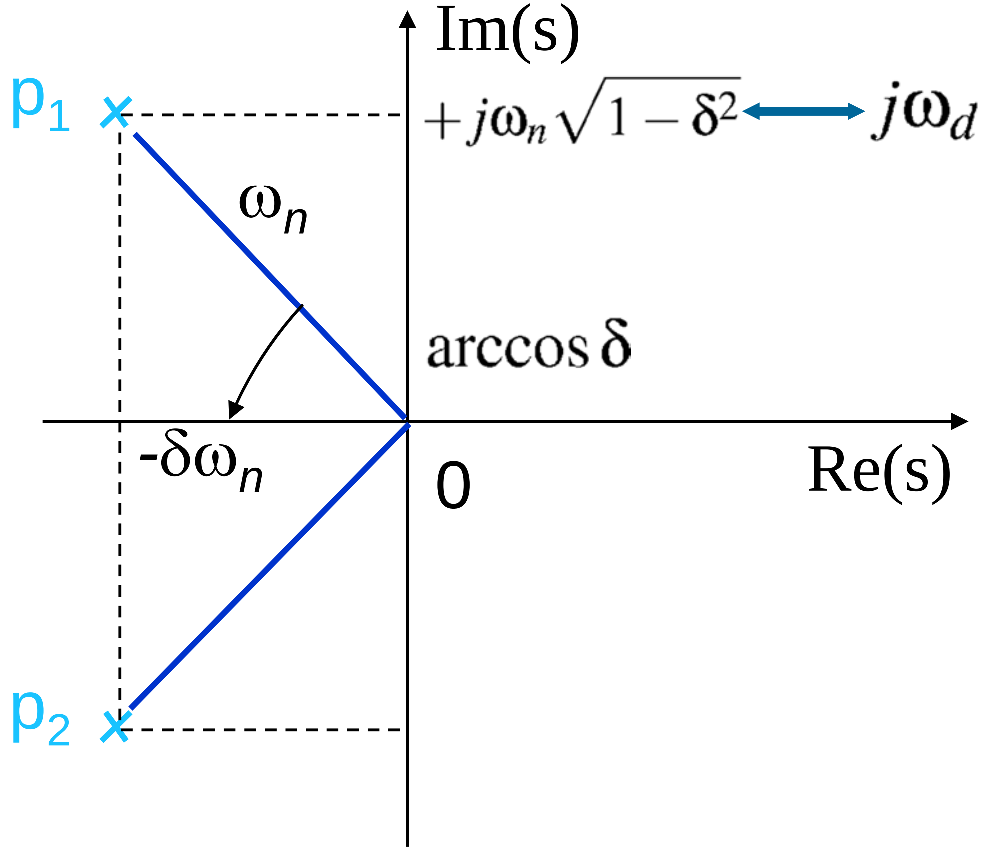
- Posizione dei poli della f.d.t. al variare di $\delta = cos(\phi)$



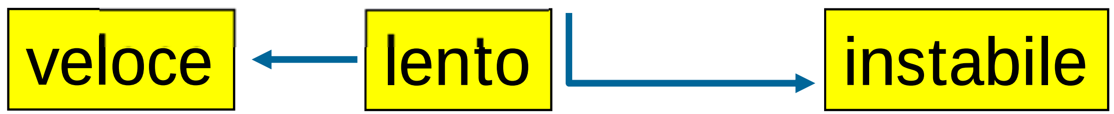
# Sistemi elementari – Secondo ordine

- Caratteristiche della risposta ⇔ poli della f.d.t.




**transitorio**



# Sistemi elementari – Secondo ordine

- Può interessare la relazione esatta fra il valore del coefficiente di smorzamento e quello della massima sovraelongazione. Per ricavarla, si deriva rispetto al tempo la

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_n^2}{s\,(s^2 + 2\,\delta\,\omega_n\,s + \omega_n^2)}\right] = 1 - A\,e^{-\delta\omega_n t}\ \mathrm{sen}\,(\omega\,t + \varphi)$$

Si ottiene

$$\frac{dy}{dt} = -A\,e^{-\delta\omega_n t}\ \omega\ \cos\,(\omega\,t + \varphi) + A\,\delta\,\omega_n\,e^{-\delta\omega_n t}\ \mathrm{sen}\,(\omega t + \varphi)$$

Ponendo la derivata uguale a zero, si ha

$$-\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\ \cos\,(\omega t + \varphi) + \delta\,\omega_n\ \mathrm{sen}\,(\omega t + \varphi) = 0$$

da cui

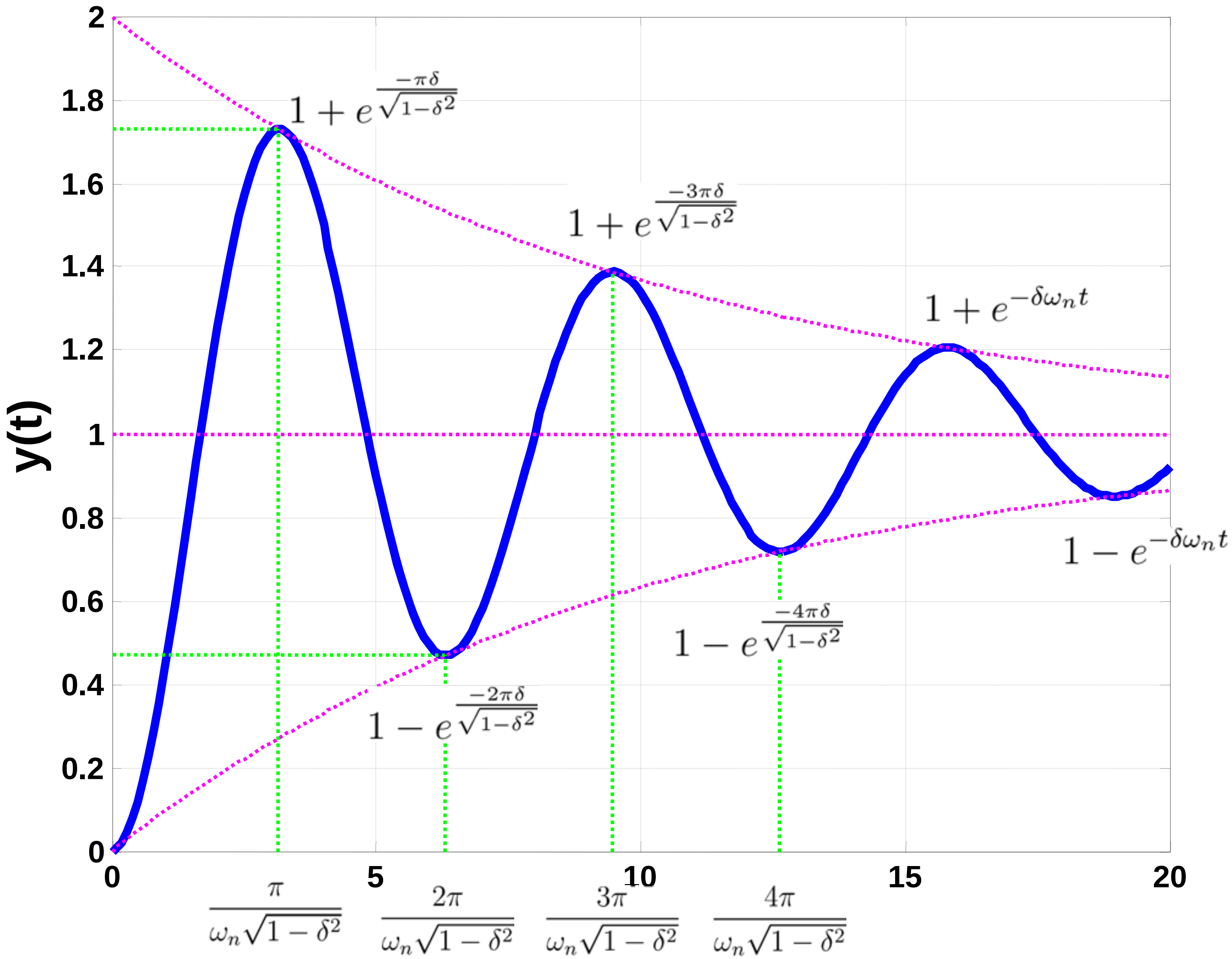
$$\tan\,(\omega t + \varphi) = \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta} \qquad \begin{cases} \omega = \omega_n\sqrt{1-\delta^2} \\ \varphi = \arctan\frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad \omega t = n\,\pi \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{n\,\pi}{\omega_n\sqrt{1-\delta^2}} \qquad (n = 0, 1, \dots)$$

# Sistemi elementari – Secondo ordine

- Si ricavano infine i valori dell'uscita in corrispondenza dei vari massimi e minimi

$$y(t)\Big|_{\substack{\max\\ \min}} = 1 - \frac{e^{\frac{-n\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}}{\sqrt{1-\delta^2}}\,\mathrm{sen}\,(n\,\pi + \varphi) \qquad \Rightarrow \qquad y(t)\Big|_{\substack{\max\\ \min}} = 1 - (-1)^n\, e^{\frac{-n\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$$

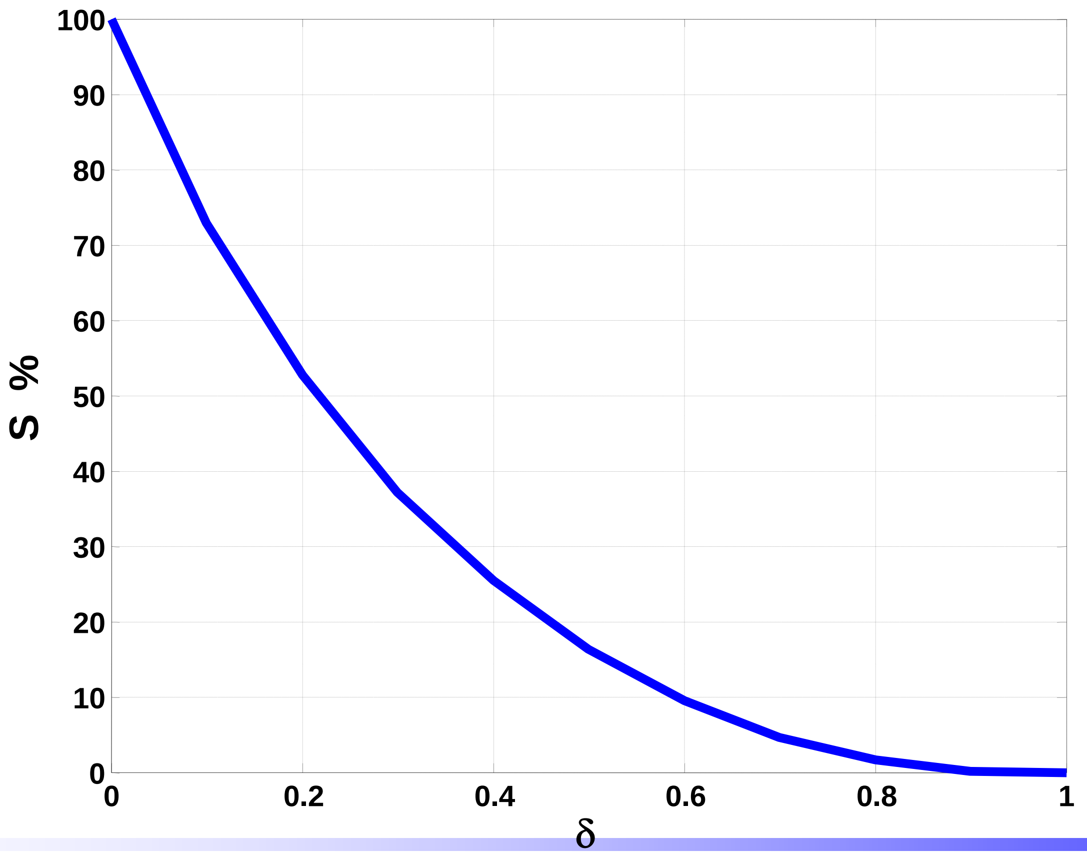


# Sistemi elementari – Secondo ordine

- Anche il valore della massima sovraelongazione S in % si ricava facilmente:

$$S\% = 100\,(y_{\max} - 1) = 100\; e^{\frac{-\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$$

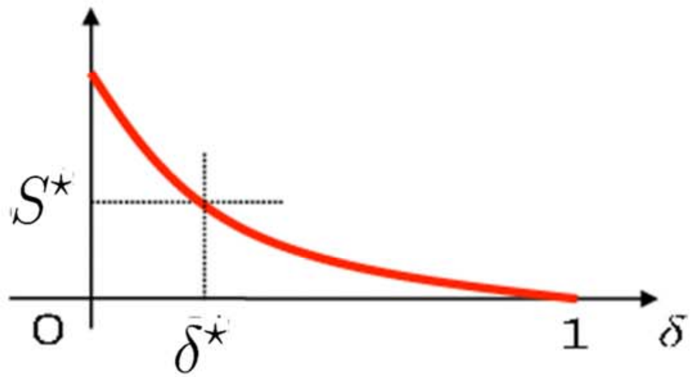
In un sistema del secondo ordine *la massima sovraelongazione è funzione unicamente del coefficiente di smorzamento* ed è uguale al 100 % quando tale coefficiente è nullo.



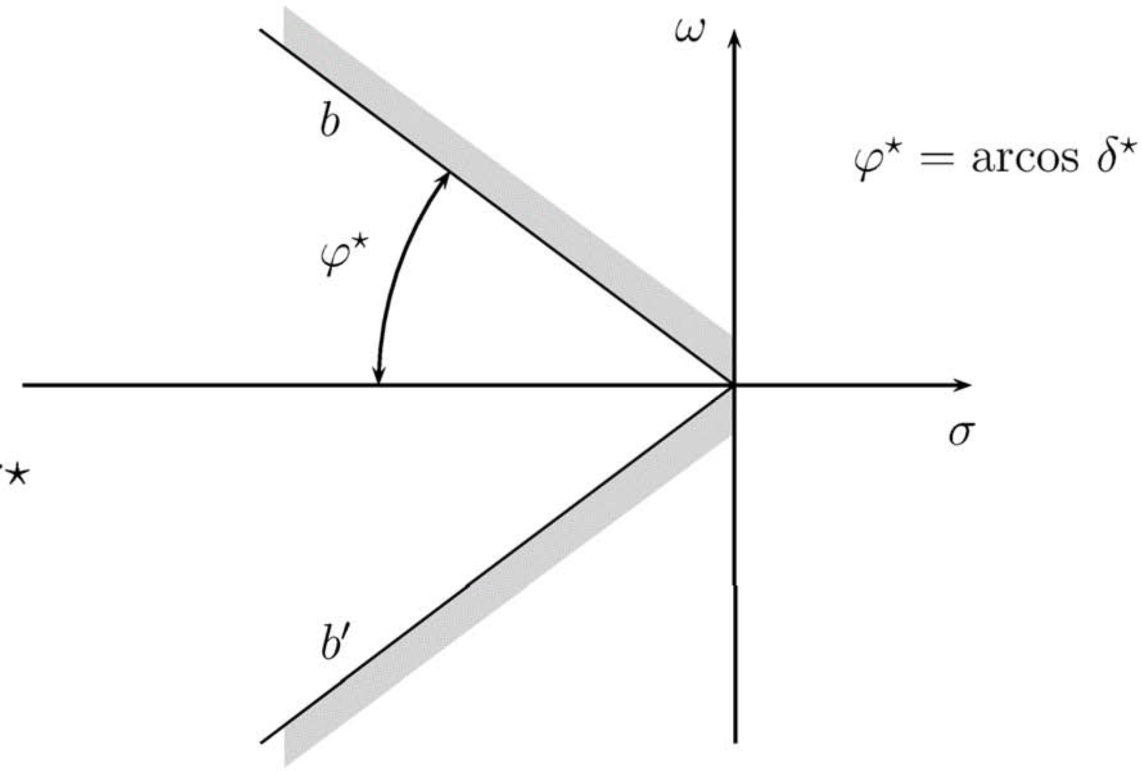
# Sistemi elementari – Secondo ordine

- Il coefficiente di smorzamento δ dipende dalla posizione dei poli complessi coniugati.
- Se il valore della massima sovraelongazione non deve superare un certo massimo assegnato, i poli del sistema devono essere compresi in settore delimitato dalle rette b e b'.

$$S\% = 100\, e^{\frac{-\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$$




$$S\% \leq S^\star \quad \Rightarrow \quad \delta \geq \delta^\star$$



# Sistemi elementari – Secondo ordine

- Spesso si specifica anche il valore massimo del tempo di assestamento $T_a$. Un limite superiore per $T_a$ si può ricavare da

$$y(t)\Big|_{\max} = 1 + e^{\frac{-n\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} \qquad \Rightarrow \qquad e^{-\delta\omega_n T_a} = 0,05$$

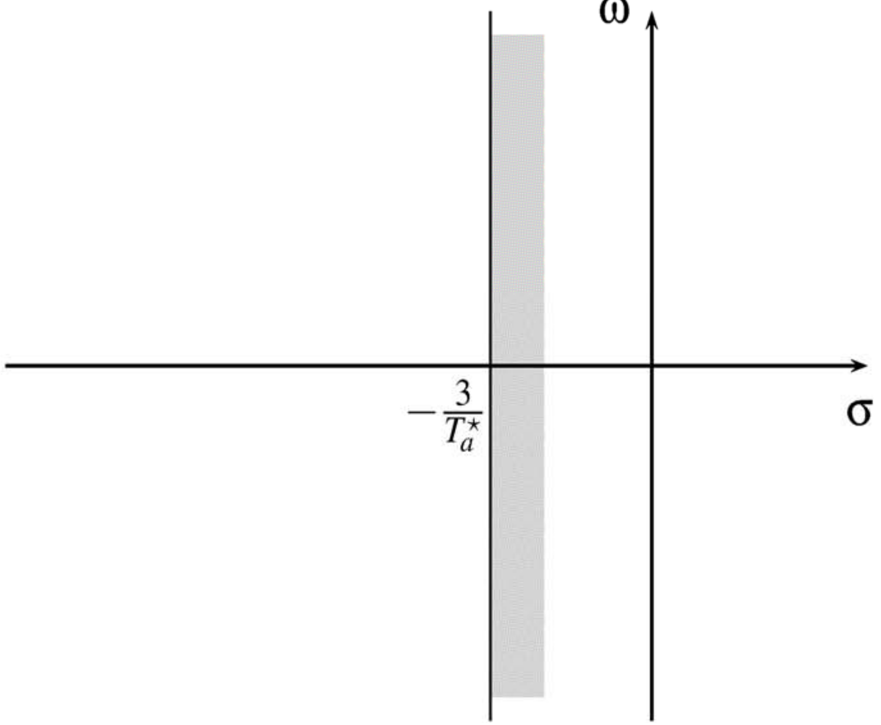
da cui

$$\delta\,\omega_n\,T_a = 3\;, \qquad \Rightarrow \qquad T_a = \frac{3}{\delta\,\omega_n}$$

Perché il tempo di assestamento sia non superiore al valore assegnato $T_a^\star$ dovrà essere

$$\frac{3}{\delta\omega_n} \leq T_a^\star \qquad \Rightarrow \qquad \delta\omega_n \geq \frac{3}{T_a^\star}$$

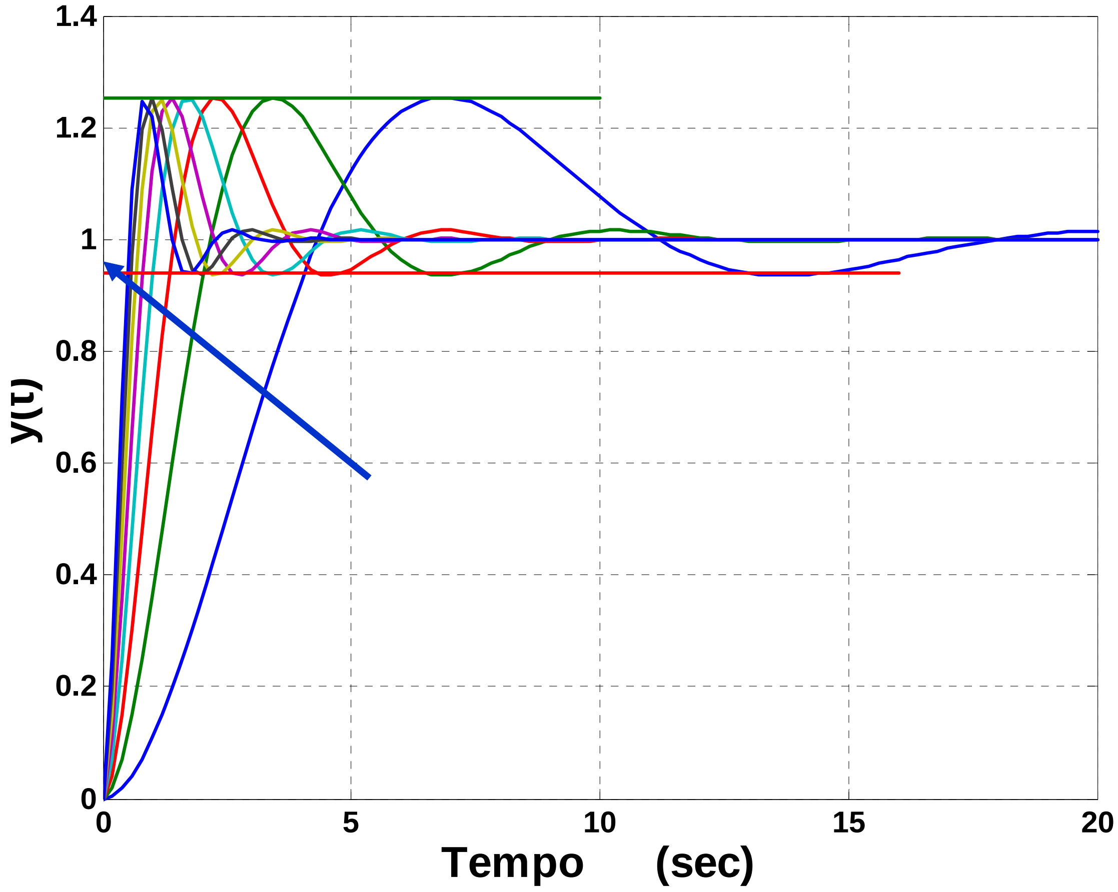
Il prodotto $\delta\ \omega_n$ è uguale in modulo, con segno opposto, alla parte reale $\sigma$ dei poli del sistema: questo vincolo equivale a limitare la posizione dei poli a sinistra di una retta verticale.

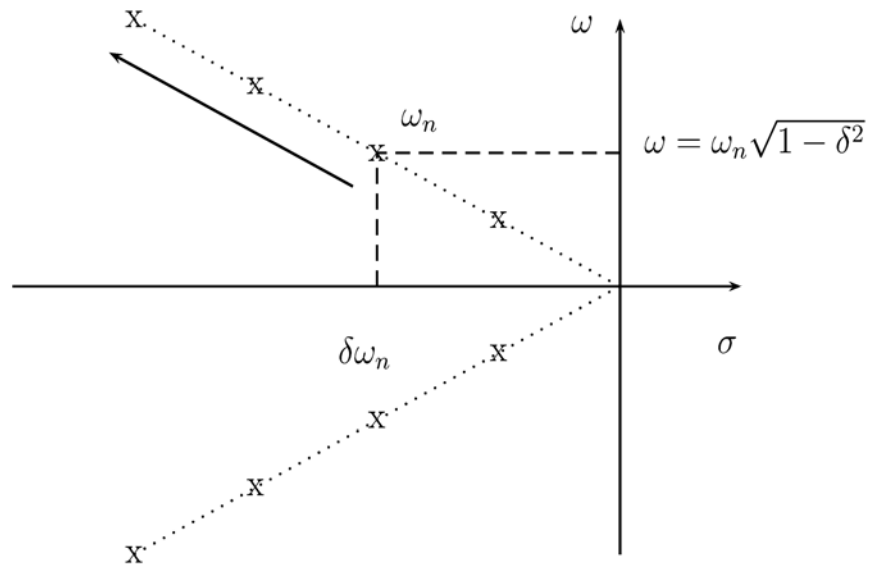


# Sistemi elementari – Secondo ordine

$$G(s) = \frac{1}{1 + 2\,\delta\,\frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\,\delta\,\omega_n\,s + \omega_n^2}$$

- Al variare di $\omega_n$ si hanno andamenti (*risposta al gradino*) di questo tipo:

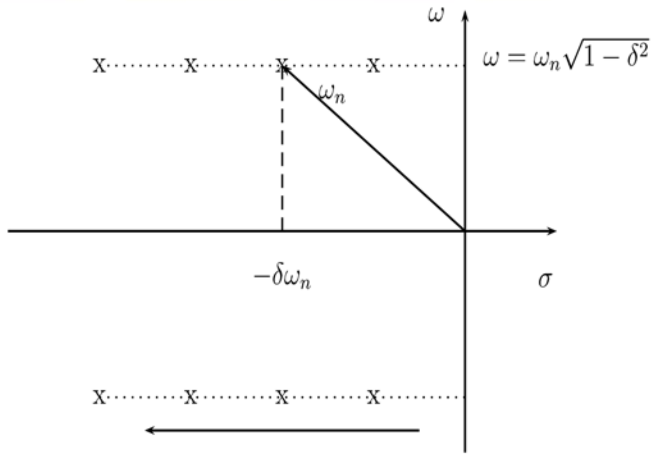


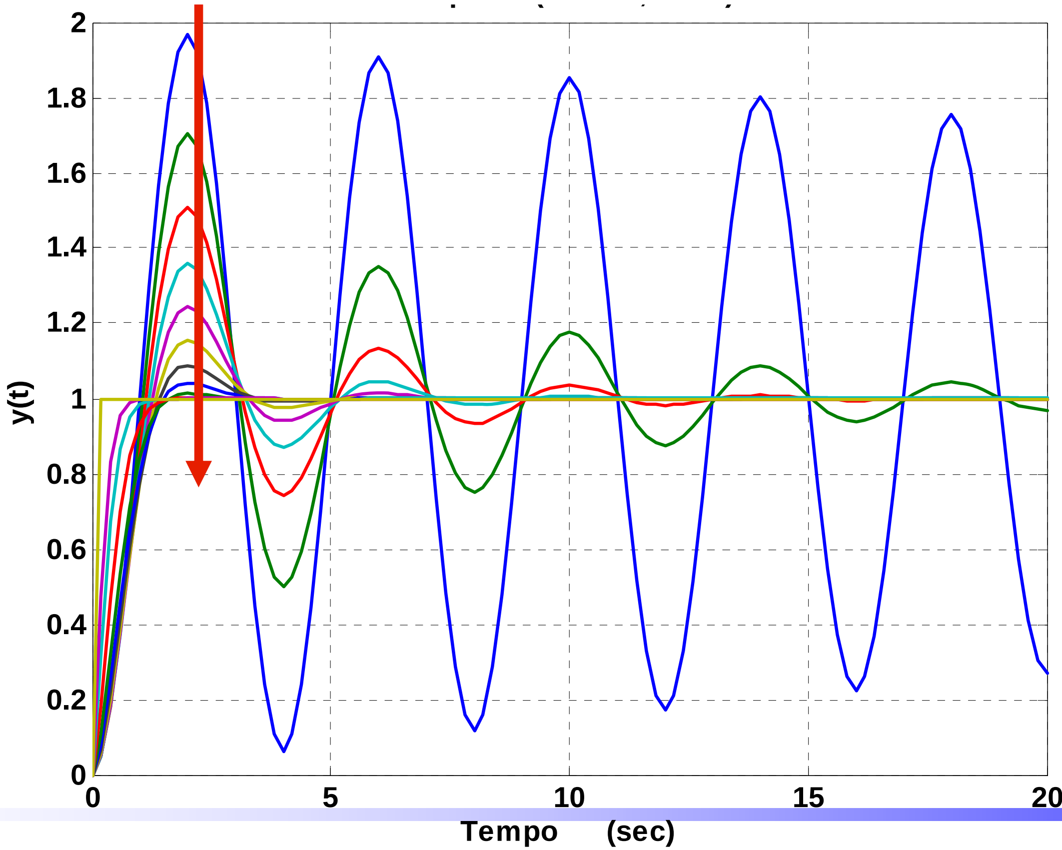




NB: il coefficiente di smorzamento è costante ($\delta$ = 0.5) e quindi il sorpasso percentuale non cambia.

# Sistemi elementari – Secondo ordine

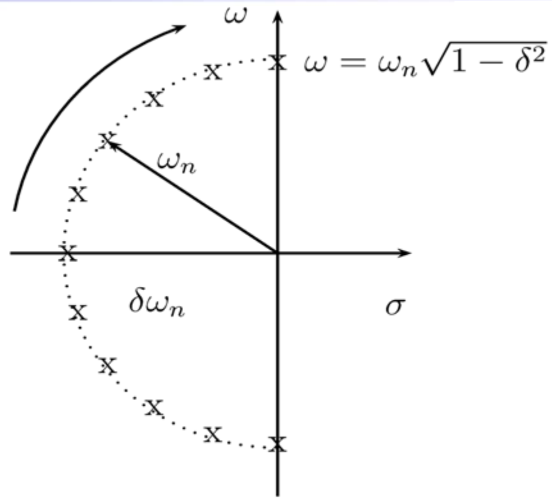
- Se i poli complessi coniugati variano come in figura:

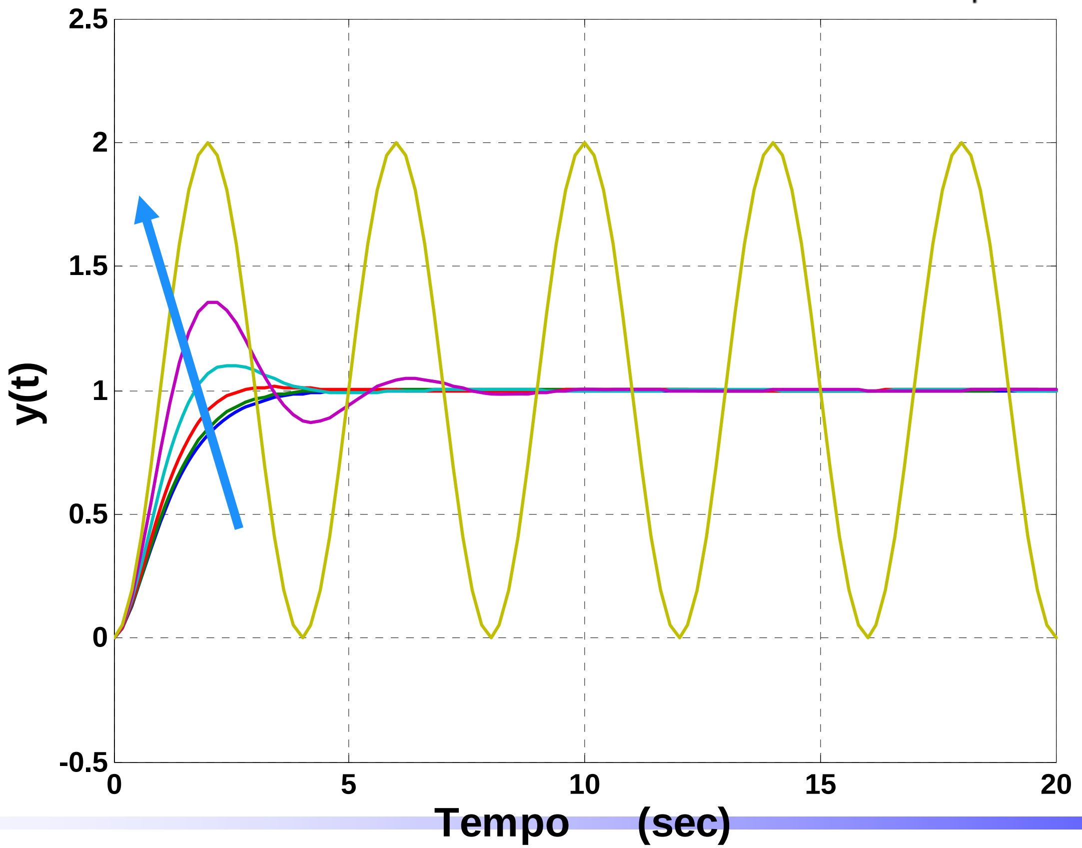


# Sistemi elementari – Secondo ordine

- Se infine si considerano poli come in figura:



# Sistemi elementari – Secondo ordine

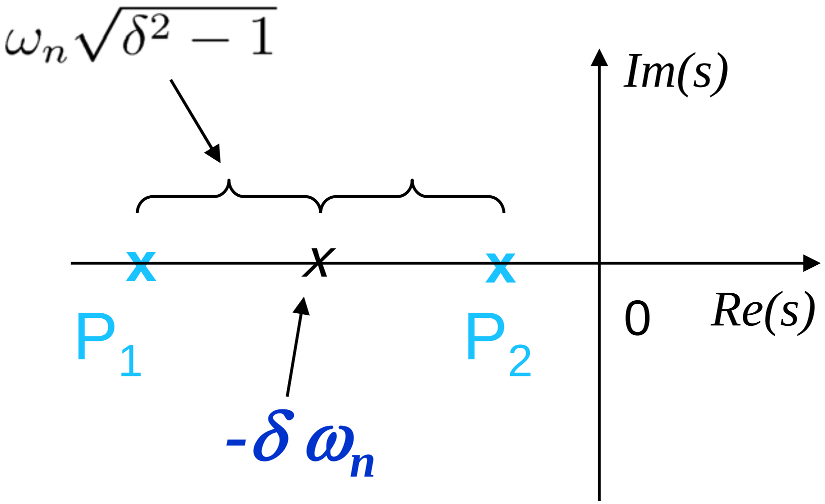
## Sistemi del secondo ordine con $\delta$>1

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\,\delta\,\omega_n\,s + \omega_n^2} = \frac{p_1 p_2}{(s+p_1)(s+p_2)} \qquad \begin{cases} p_1 = \omega_n(-\delta - \sqrt{\delta^2 - 1}) \\ p_2 = \omega_n(-\delta + \sqrt{\delta^2 - 1}) \end{cases}$$

**Poli reali:**

**Coincidenti per δ = 1**

**Distinti per δ > 1**



# Sistemi elementari – Secondo ordine

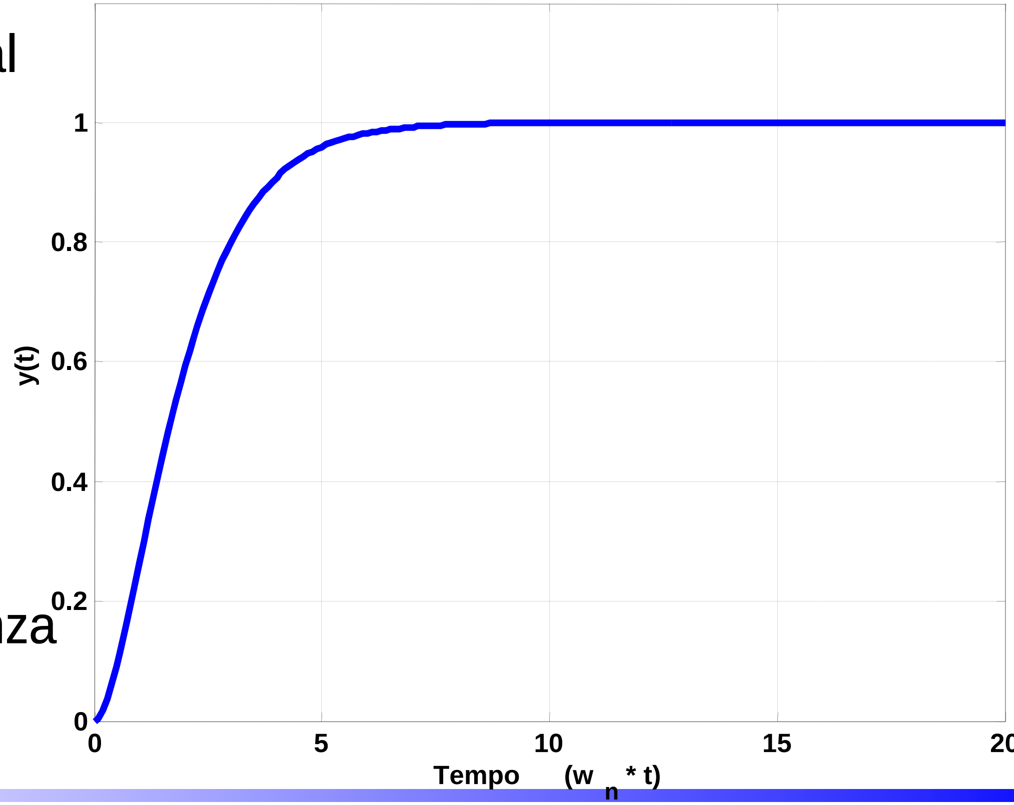
- L'equazione $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{\omega_n^2}{s\,(s^2 + 2\,\delta\,\omega_n\,s + \omega_n^2)}\right] = 1 - A\,e^{-\delta\omega_n t}\ \mathrm{sen}\,(\omega\,t + \varphi)$

  fornisce la risposta per $0 < \delta < 1$, cioè nel caso in cui il sistema presenti poli complessi coniugati.

  Per $\delta$ = 1 (poli reali coincidenti) si ha: $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{\omega_n^2}{s\,(s + \omega_n)^2}\right]$

  e quindi (dalle tabelle) la risposta al gradino è data dalla relazione

$$y(t) = 1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n\,t\,e^{-\omega_n t}$$




  Per $\delta$ = 1 non si ha alcuna sovraelongazione: y(t) tende asintoticamente al valore finale senza mai superarlo.

# Sistemi elementari – Secondo ordine

- Per $\delta > 1$ (poli reali distinti) si ha

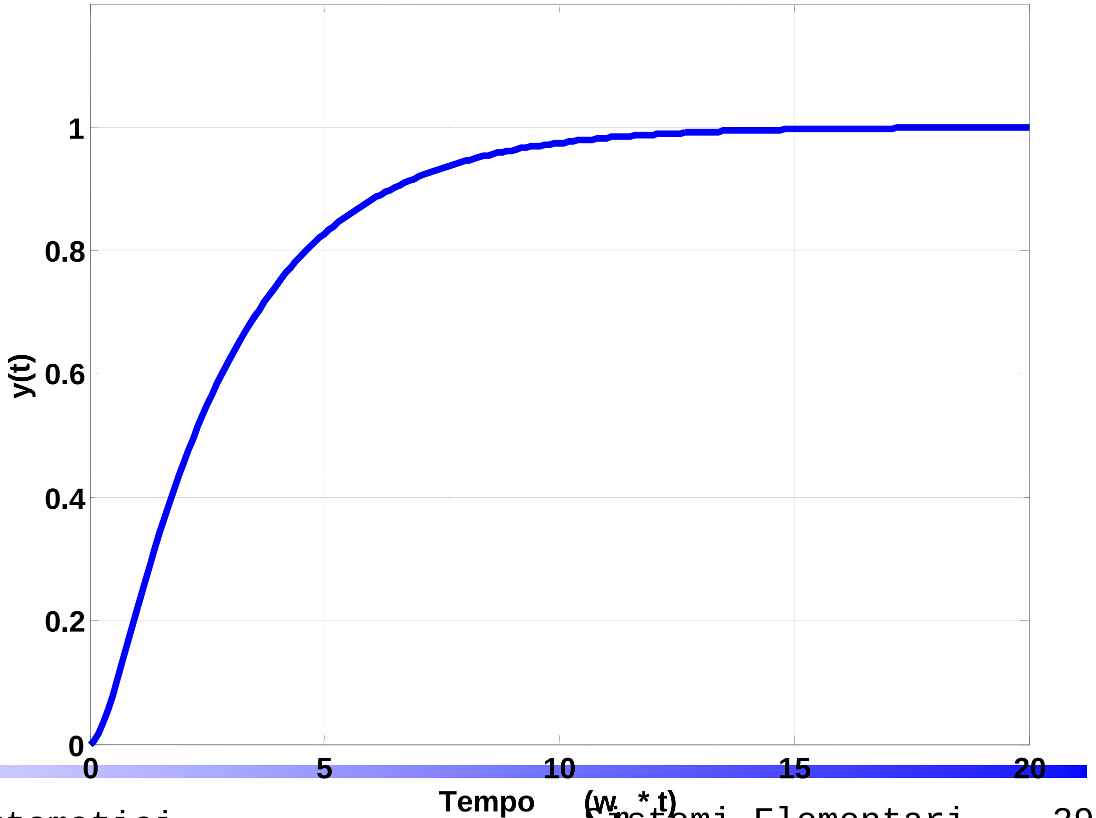
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_n^2}{s\,(s^2 + 2\,\delta\,\omega_n\,s + \omega_n^2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_n^2}{s\,(s-p_1)(s-p_2)}\right]$$

e quindi (dalle tabelle) la risposta al gradino è data dalla funzione

$$y(t) = 1 + K_1\,e^{p_1 t} + K_2\,e^{p_2 t}$$

con

$$\begin{aligned} p_1 &= \omega_n\,(-\delta + \sqrt{\delta^2 - 1}) \\ p_2 &= \omega_n\,(-\delta - \sqrt{\delta^2 - 1}) \\ K_1 &= p_2/(p_1 - p_2) \\ K_2 &= p_1/(p_2 - p_1) \end{aligned}$$



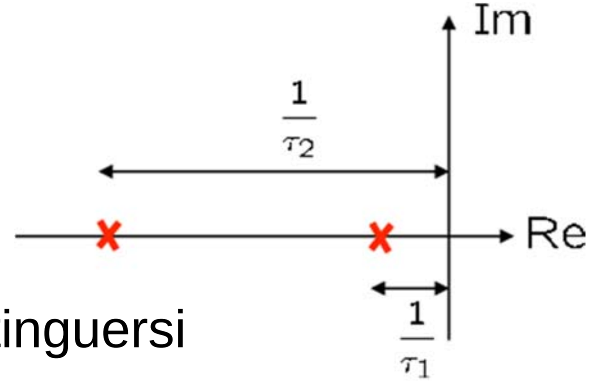
# Sistemi elementari – Secondo ordine

- Per $\delta > 1$ (poli reali distinti) la risposta in funzione delle costanti di tempo $\tau_1 = -\dfrac{1}{p_1}$ e $\tau_2 = -\dfrac{1}{p_2}$ risulta

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_n^2}{s\,(s-p_1)(s-p_2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s\,(\tau_1\,s+1)(\tau_2\,s+1)}\right]$$

ovvero $y(t) = 1 - \dfrac{\tau_1}{\tau_1-\tau_2}\,e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \dfrac{\tau_2}{\tau_1-\tau_2}\,e^{-\frac{t}{\tau_2}}$

- In molti casi di interesse pratico i due poli hanno costanti di tempo molto diverse ( $\tau_1 \gg \tau_2$ ovvero $\dfrac{1}{\tau_1} << \dfrac{1}{\tau_2}$)




- Il termine associato al polo con costante di tempo maggiore è caratterizzato da un residuo molto più grande e da un esponenziale molto più lento ad estinguersi

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\tau_1}{\tau_1-\tau_2} \xrightarrow[\tau_2 \to 0]{\tau_1 \to \infty} 1 \\[2ex] \dfrac{\tau_2}{\tau_1-\tau_2} \xrightarrow{\hspace{3em}} 0 \end{array}\right\} y(t) \to 1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}$$

La risposta del sistema tende a quella di un sistema del primo ordine governato dal **polo dominante**

# Sistemi elementari – Secondo ordine con zero

Sia data la funzione

$$G(s) = \frac{\omega_n^2(1 + Ts)}{s^2 + 2\delta\omega_n\, s + \omega_n^2}$$

Si può scrivere:

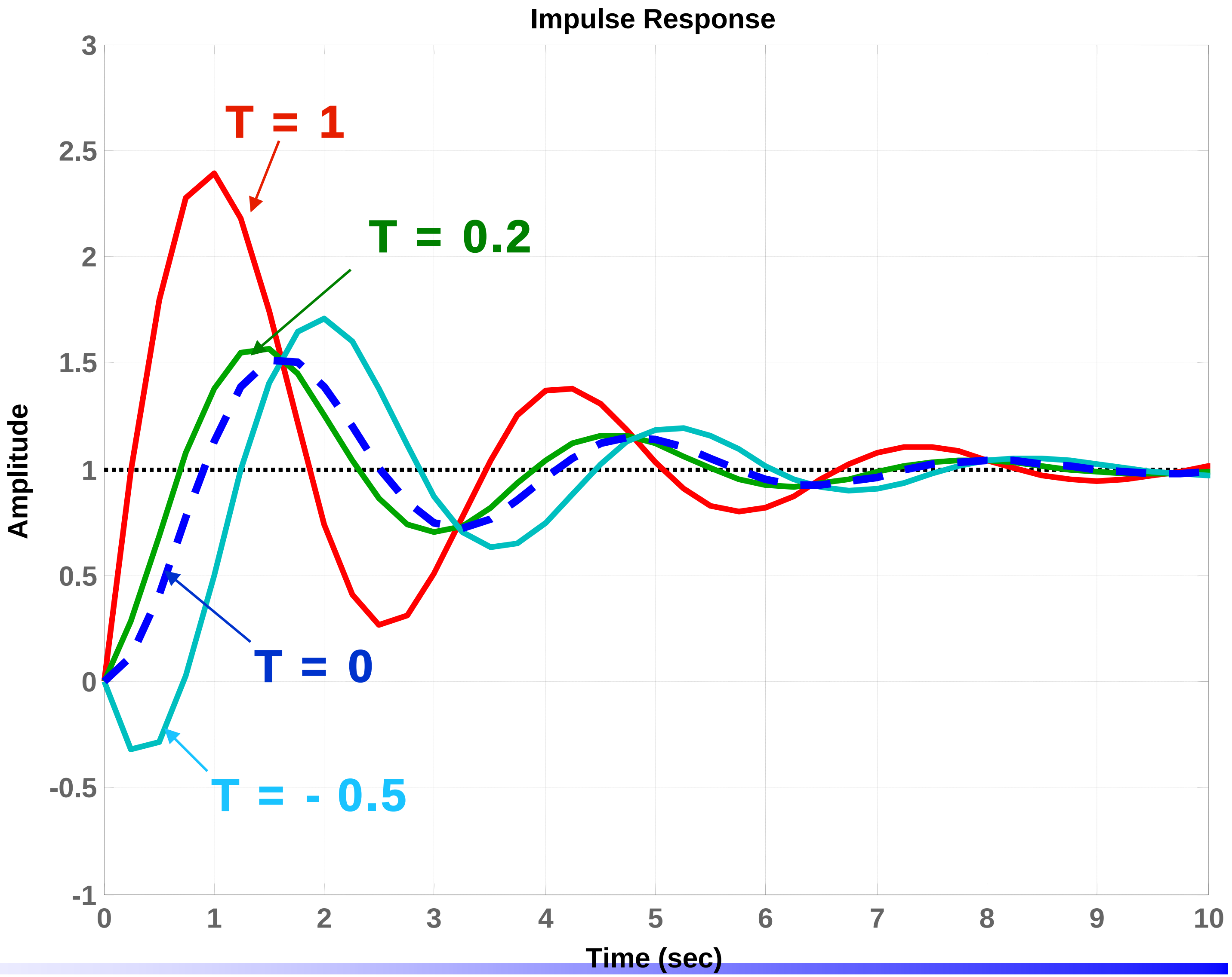
$$G(s) = G_0 + T\, s\, G_0, \qquad G_0(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n\, s + \omega_n^2}$$

Da cui

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G_0(s)}{s}\right\} + T\mathcal{L}^{-1}\left\{s\frac{G_0(s)}{s}\right\} = y_0(t) + T\frac{d\, y_0(t)}{d\, t}$$

# Sistemi elementari – Secondo ordine con zero

$$G(s) = \frac{4(1+Ts)}{s^2 + 0.8\,s + 4} \qquad T = 0.2,\ 1,\ -0.5$$



# Sistemi elementari – Secondo ordine con zero

- Nel caso di un sistema con 2 poli reali + zero reale

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1 + T\,s}{s\,(\tau_1\,s + 1)(\tau_2\,s + 1)}\right]$$

da cui antitrasformando si ottiene

$$y(t) = 1 - \frac{\tau_1 - T}{\tau_1 - \tau_2}\,e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{\tau_2 - T}{\tau_1 - \tau_2}\,e^{-\frac{t}{\tau_2}}$$

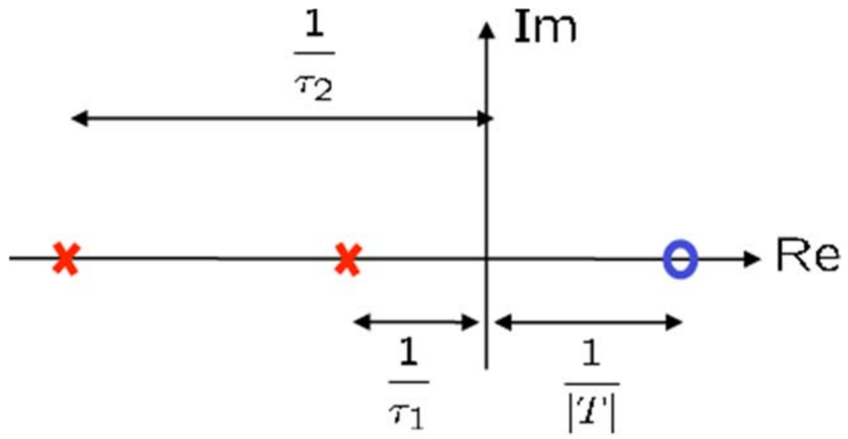
- Proprietà della risposta per $t = 0,\ t = \infty$

$$y(0) = 0 \qquad \dot{y}(0) = \frac{T}{\tau_1\,\tau_2} \qquad y(\infty) = 1$$

- L’analisi della risposta temporale, e in particolare il valore dei residui associati ai poli, dipende fortemente dalla posizione dello zero.

# Sistemi elementari – Secondo ordine con zero

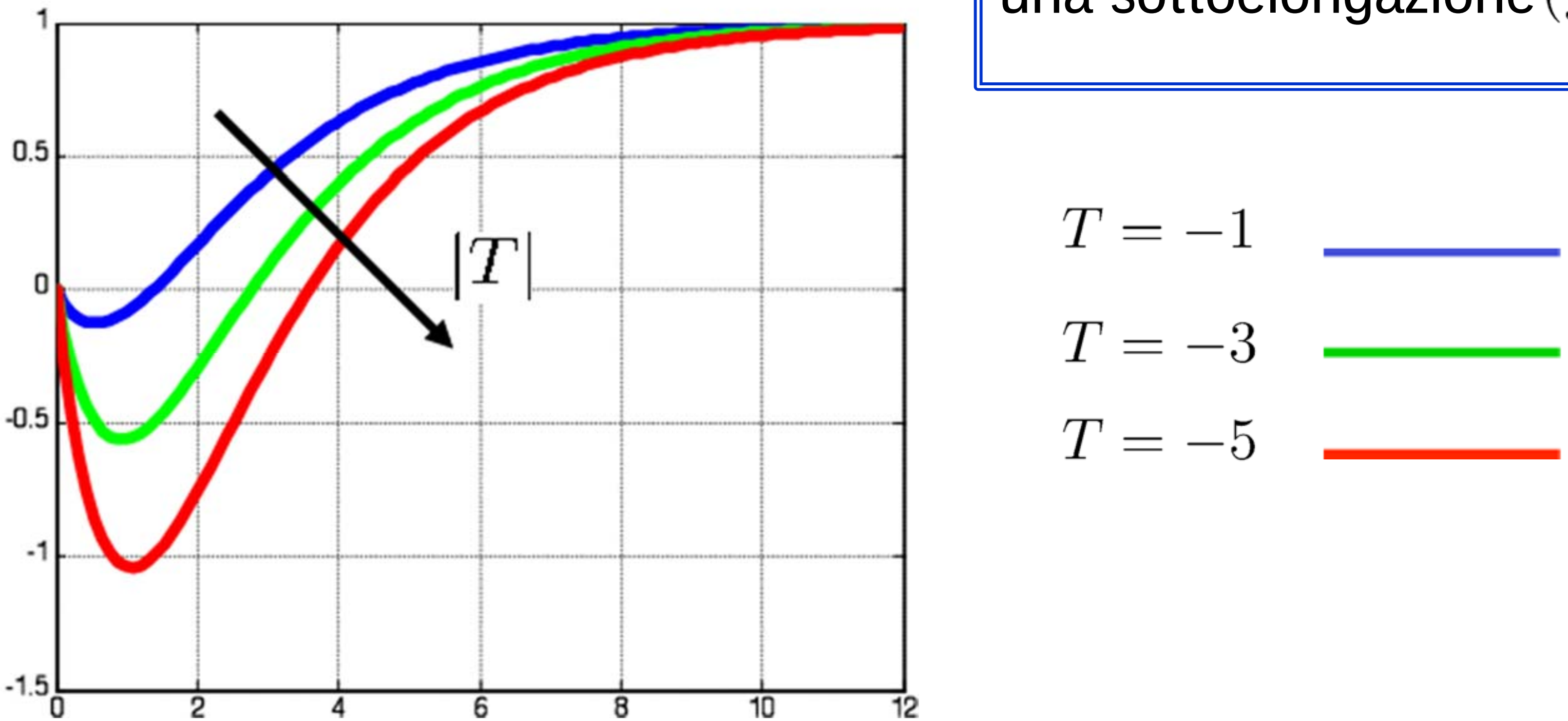
- Caso sistemi **a fase non minima:** $T < 0 \; (\tau_1 \geq \tau_2 > 0)$




Essendo $\dot{y}(0) = \dfrac{T}{\tau_1 \, \tau_2}$

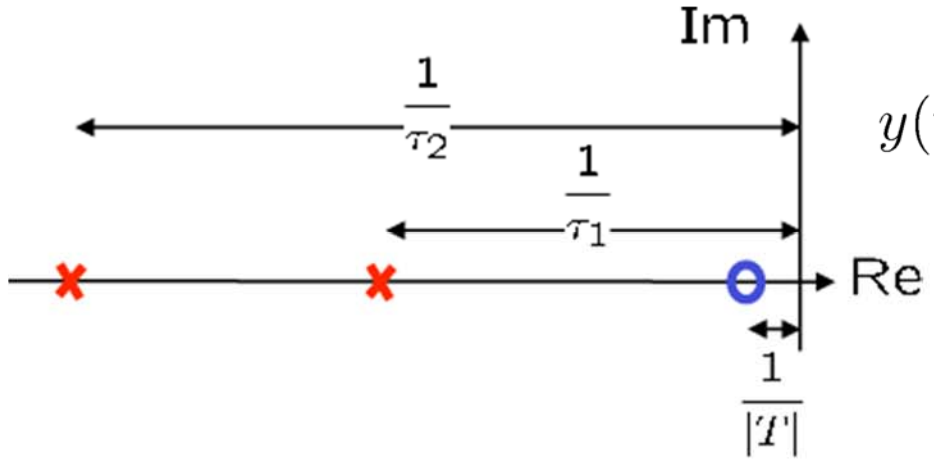
Si ha che la risposta parte con

una sottoelongazione $(\dot{y}(0) < 0)$

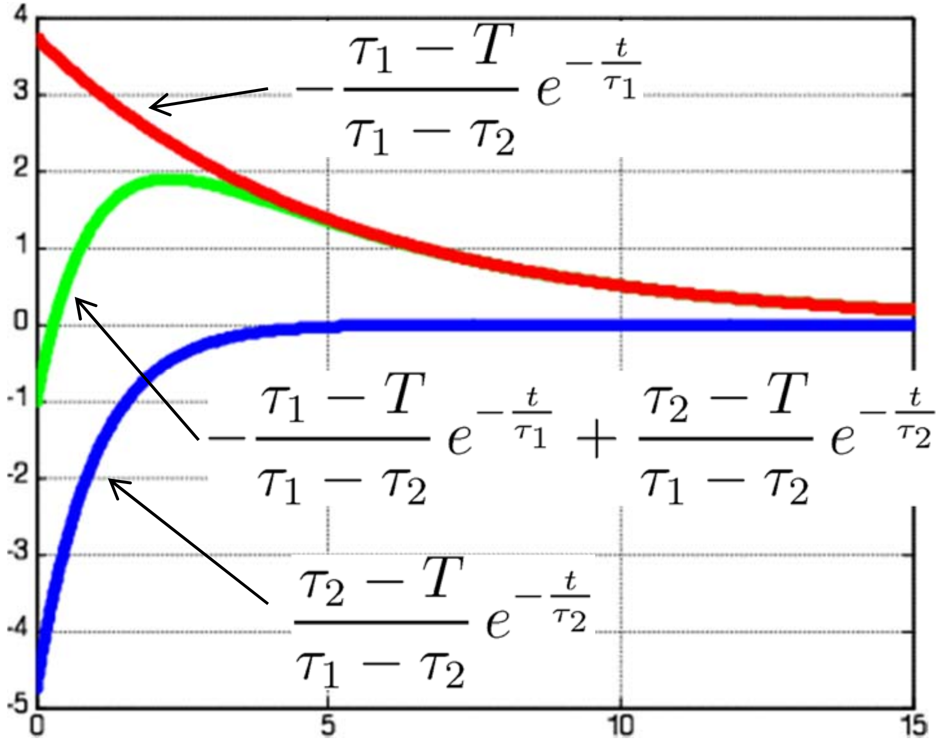


# Sistemi elementari – Secondo ordine con zero

- Caso sistemi **a fase minima:** $T >> \tau_1 \geq \tau_2 > 0$




$$y(t) = 1 - \underbrace{\frac{\tau_1 - T}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_1}}}_{\text{Termine >0 che tende a zero 'lentamente'}} + \underbrace{\frac{\tau_2 - T}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}}}_{\text{Termine <0 che tende a zero 'velocemente'}}$$




Inoltre:

$$\dot{y}(0) = \frac{T}{\tau_1 \, \tau_2} >> \frac{1}{\tau_1 \, \tau_2}$$

Derivata nel caso non ci sia lo zero

# Sistemi elementari – Secondo ordine con zero

- Caso sistemi **a fase minima:** $T >> \tau_1 \geq \tau_2 > 0$

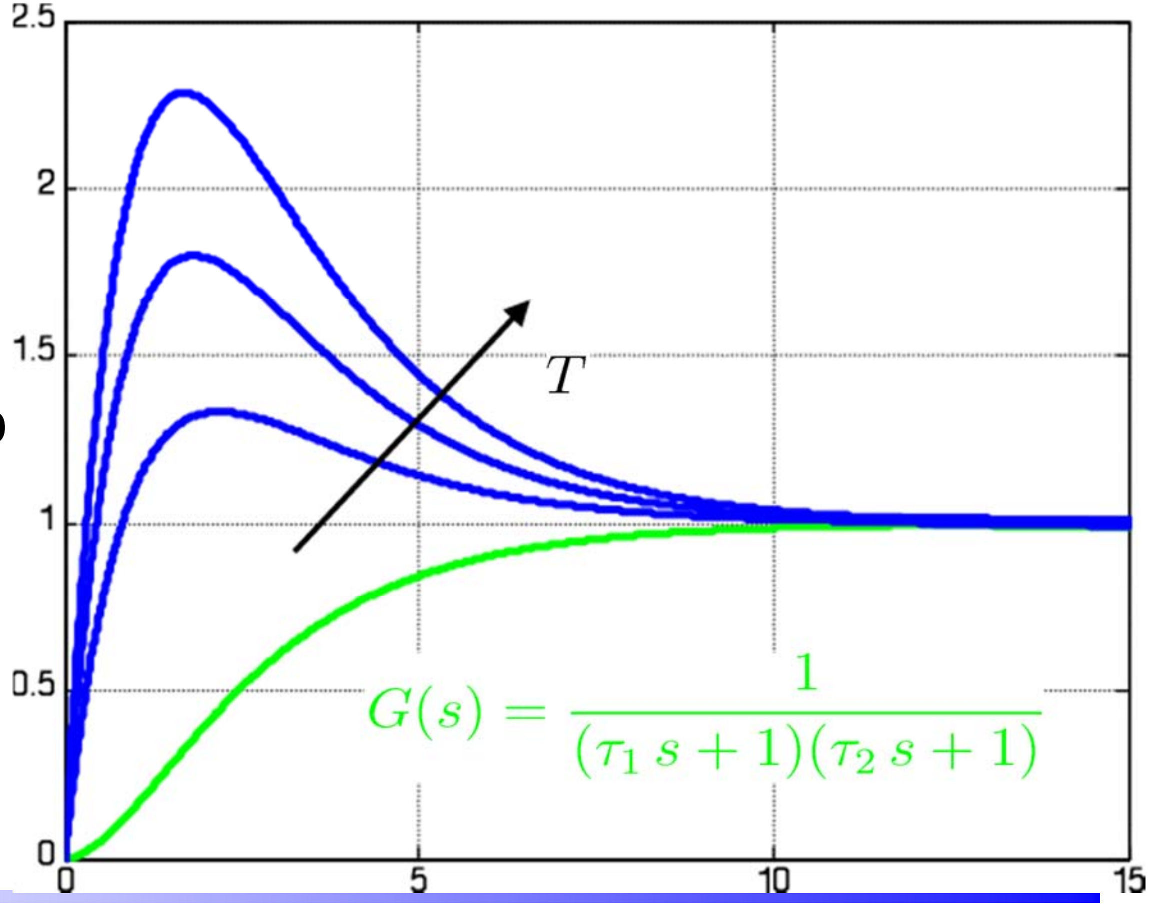
$$G(s) = \frac{1 + T\,s}{(\tau_1\,s+1)(\tau_2\,s+1)}$$

$\tau_1 = 2,\ \tau_2 = 1 \qquad T = 4,\ 6,\ 8$

- La risposta presenta una sovraelongazione tanto più marcata quanto più lo zero tende verso l'origine

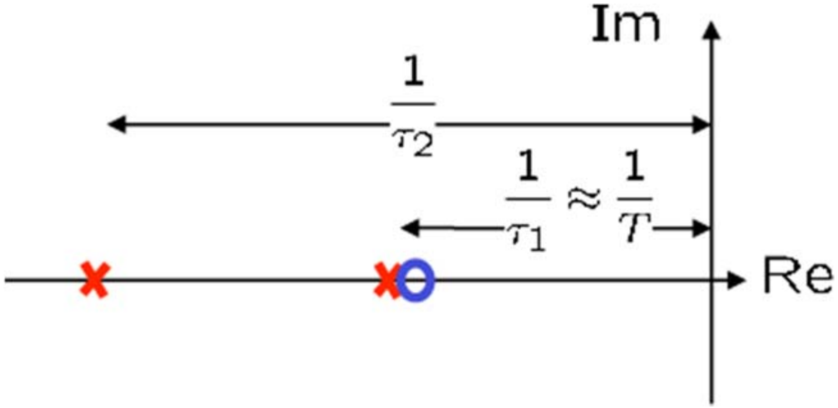
- Risposta non oscillatoria

- Risposta molto più "brusca" dell'equivalente sistema privo di zero



# Sistemi elementari – Secondo ordine con zero

- Caso sistemi **a fase minima** con quasi **cancellazione**: $T \approx \tau_1 \geq \tau_2 > 0$

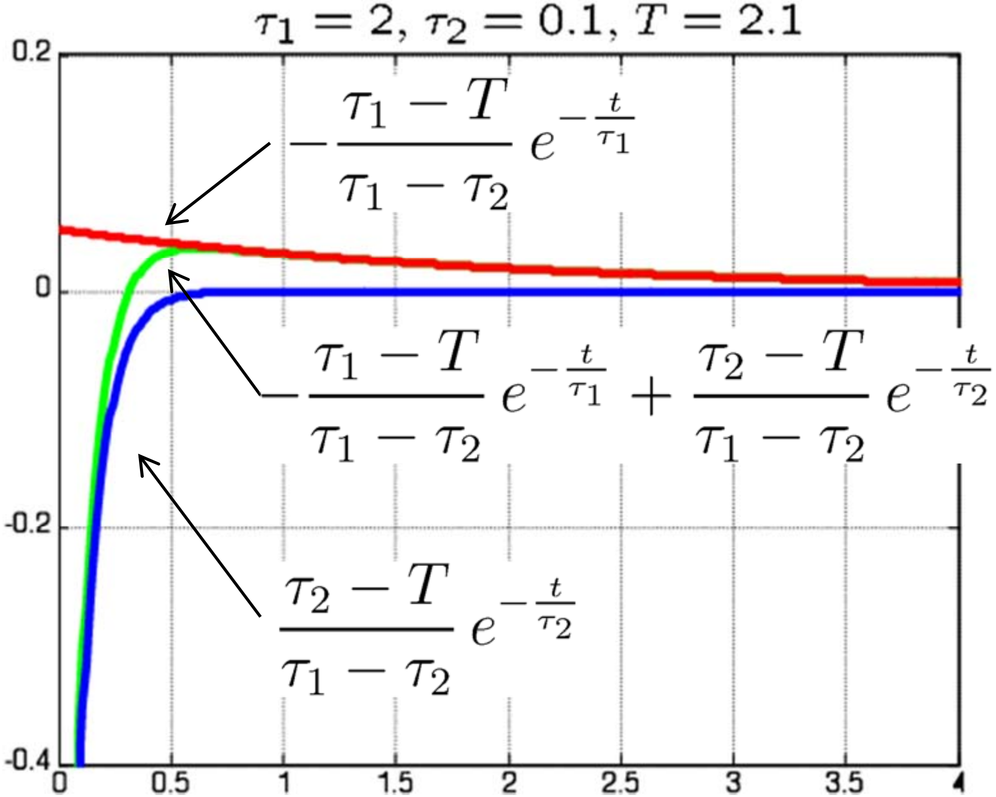



$$y(t) = 1 - \underbrace{\frac{\tau_1 - T}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_1}}} + \underbrace{\frac{\tau_2 - T}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}}}$$

Termine <0 che tende a zero 'velocemente'

Il residuo associato è molto piccolo e
- >0 se $T > \tau_1$
- <0 se $T < \tau_1$

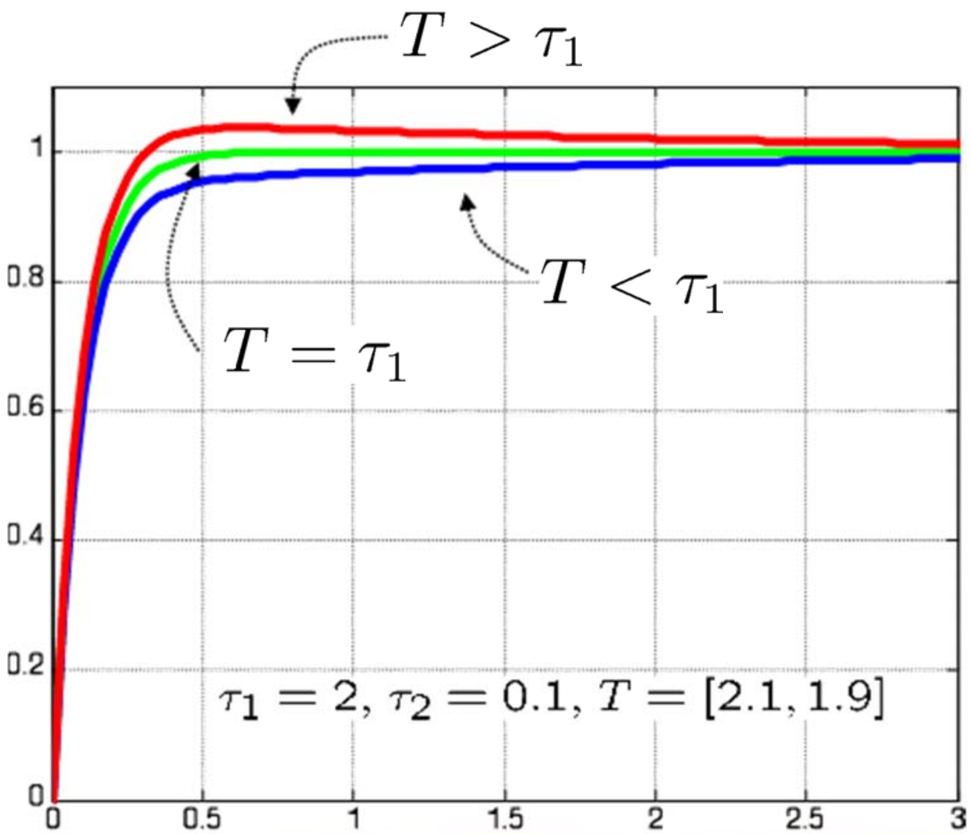
Inoltre l'esponenziale tende a zero 'lentamente'




L'esponenziale "lento" genera un contributo piccolo che non è evidente nei primi istanti del transitorio (in quanto "sovrastato" dal contributo dell'esponenziale "veloce") ma che appare asintoticamente.

# Sistemi elementari – Secondo ordine con zero

- Caso sistemi **a fase minima** con quasi **cancellazione**: $T \approx \tau_1 \geq \tau_2 > 0$
- L'andamento di $y(t)$ è inizialmente **analogo a quello di un sistema del primo ordine** (governato dal polo "veloce" con costante di tempo $\tau_2$) . Al passare del tempo emerge un contributo "subdolo" che si esaurisce lentamente con una velocità che dipende dalla costante di tempo associata allo zero $T \approx \tau_1$)




- Tipica risposta con due dinamiche temporali.
- Coda di assestamento dovuta alla quasi cancellazione polo/zero.

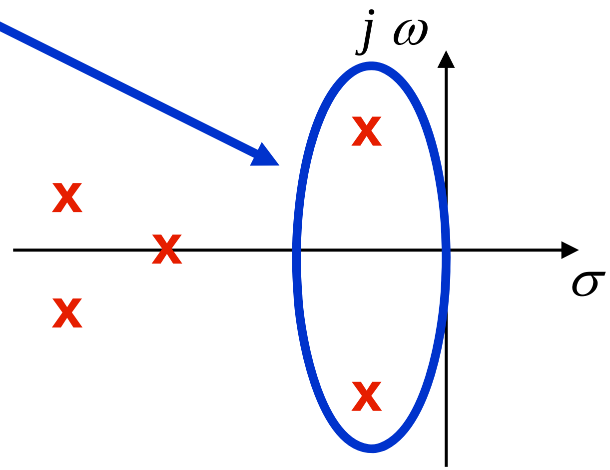
# Sistemi di ordine superiore al secondo

- Nel caso di un sistema con due poli reali e uno zero, si è visto che se la costante di tempo dello zero è simile a quella di uno dei due poli, la risposta è assimilabile a quella di un sistema del primo ordine (ottenuto eliminando le due singolarità prossime tra loro)

- Nel caso di sistemi di ordine superiore è possibile ottenere un modello approssimato di ordine ridotto (con una risposta al gradino simile al sistema di partenza) **cancellando coppie di poli/zeri vicini** tra loro nel piano complesso e **con parte reale negativa**.

# Sistemi di ordine superiore al secondo

- Una volta cancellati coppie di poli e zeri prossimi tra loro vengono chiamati **poli dominanti** i poli, reali o complessi, nettamente più vicini rispetto agli altri poli




- La risposta al gradino di un sistema con poli dominanti può essere approssimata con quella di un sistema la cui funzione di trasferimento possiede soltanto questi poli e un guadagno pari a quello del sistema di partenza.

# Sistemi di ordine superiore al secondo

- Risposta al gradino della funzione

$$G(s) = \frac{1200(s+20)}{(s+10)(s^2+0.1s+1.0025)(s^2+10s+425)}$$

$$G(0) = \frac{1200 \cdot 20}{10 \cdot 1.0025 \cdot 425} = 5.633$$

e della sua approssimante

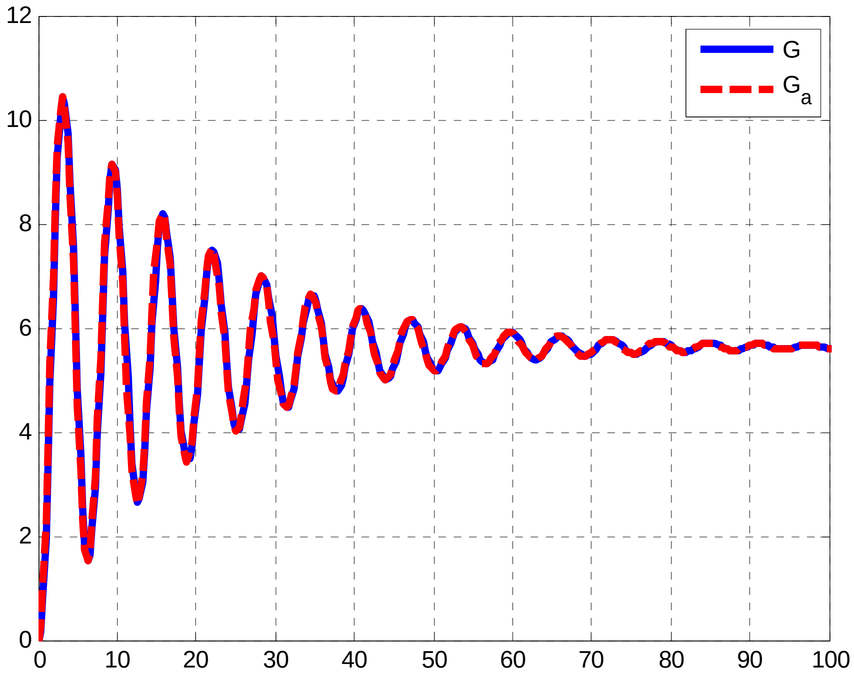
$$G_a(s) = \frac{5.633}{(\frac{s^2}{1.0025} + \frac{0.1}{1.0025}s + 1)}$$

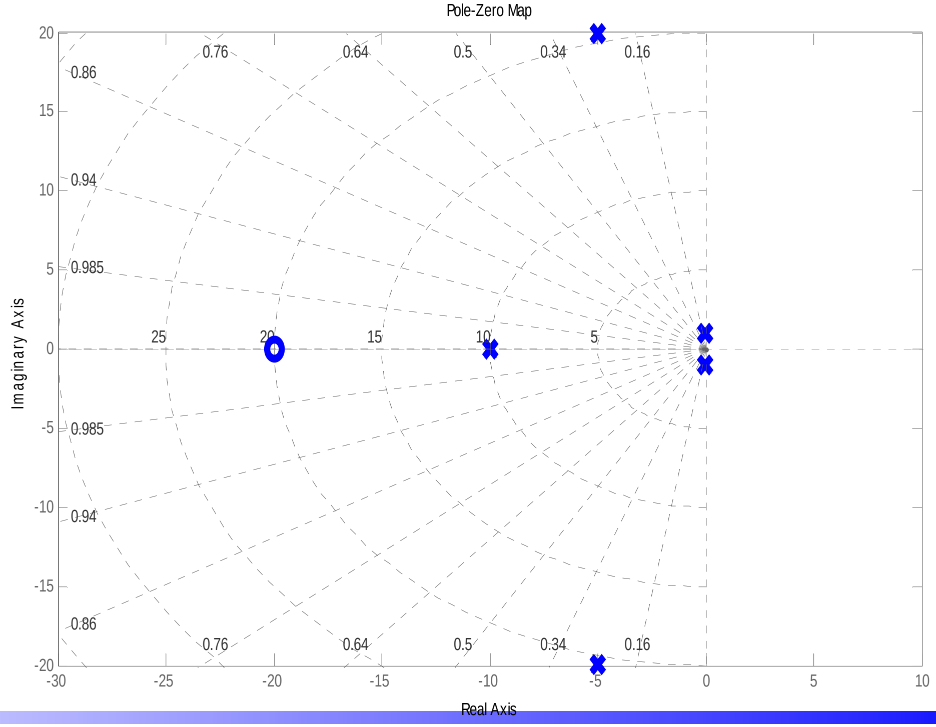
$$z_1 = -20$$

$$p_1 = -10$$

$$p_{2,3} = -0.05 \pm j1$$

$$p_{4,5} = -5 \pm j20$$



# Sistemi di ordine superiore al secondo

- Risposta al gradino della funzione

$$G(s) = \frac{12(s+20)}{(s+0.1)(s^2+10s+425)}$$

e della sua approssimante

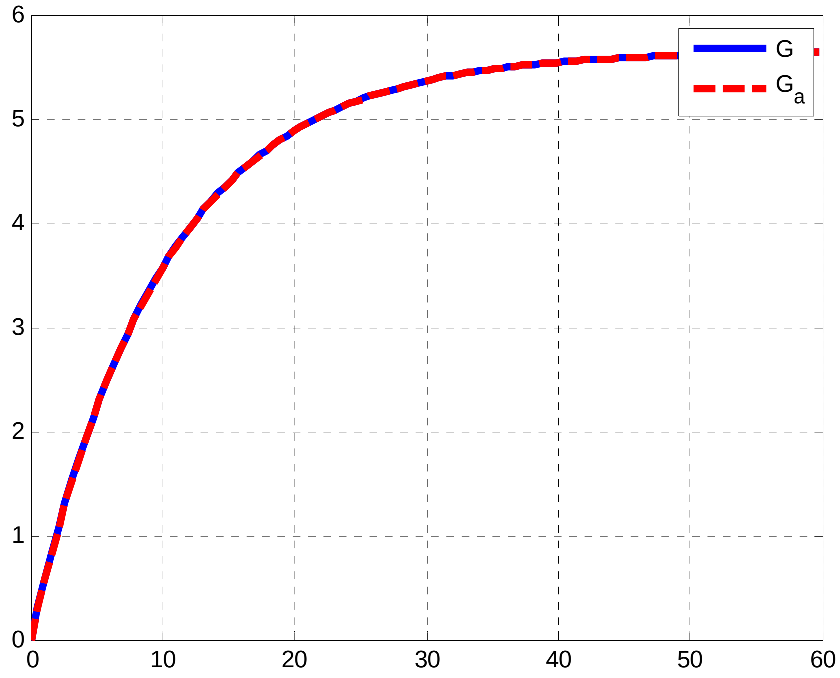
$$G_a(s) = \frac{5.6471}{(\frac{1}{0.1}s+1)}$$

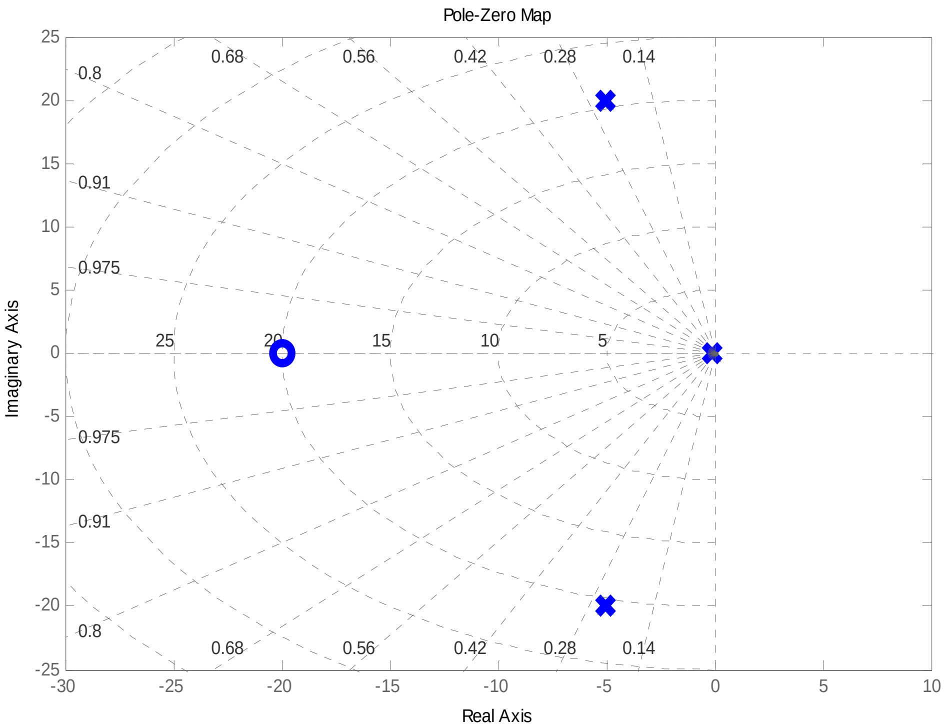
$$G(0) = \frac{12 \cdot 20}{0.1 \cdot 425} = 5.6471$$

$$z_1 = -20$$

$$p_1 = -0.1$$

$$p_{4,5} = -5 \pm j20$$



# Sistemi di ordine superiore al secondo

- Risposta al gradino della funzione

$$G(s) = \frac{2000(s+0.25)}{(s+0.2)(s^2+10s+425)}$$

e della sua approssimante

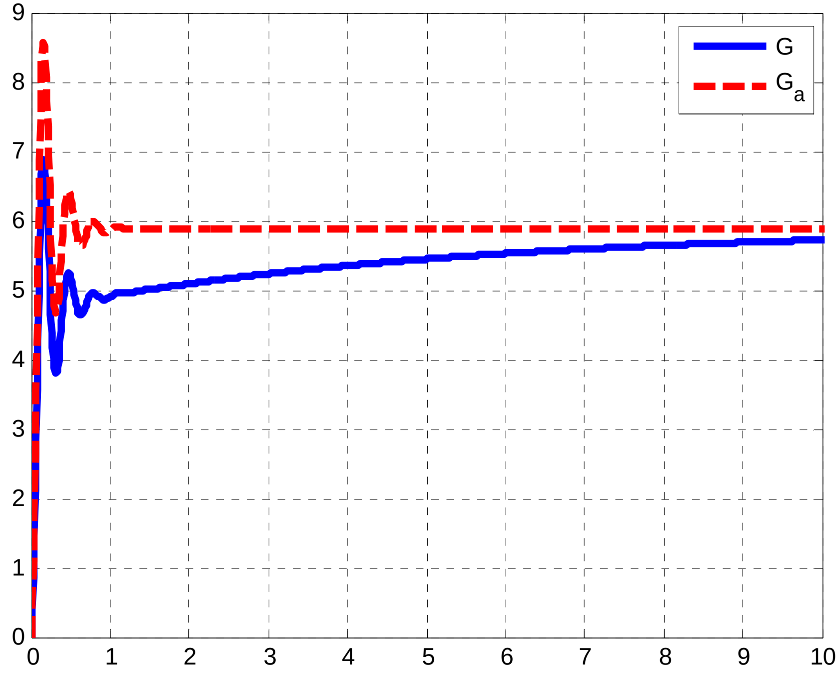
$$G_a(s) = \frac{5.8824}{\left(\frac{s^2}{425}+\frac{10}{425}s+1\right)}$$

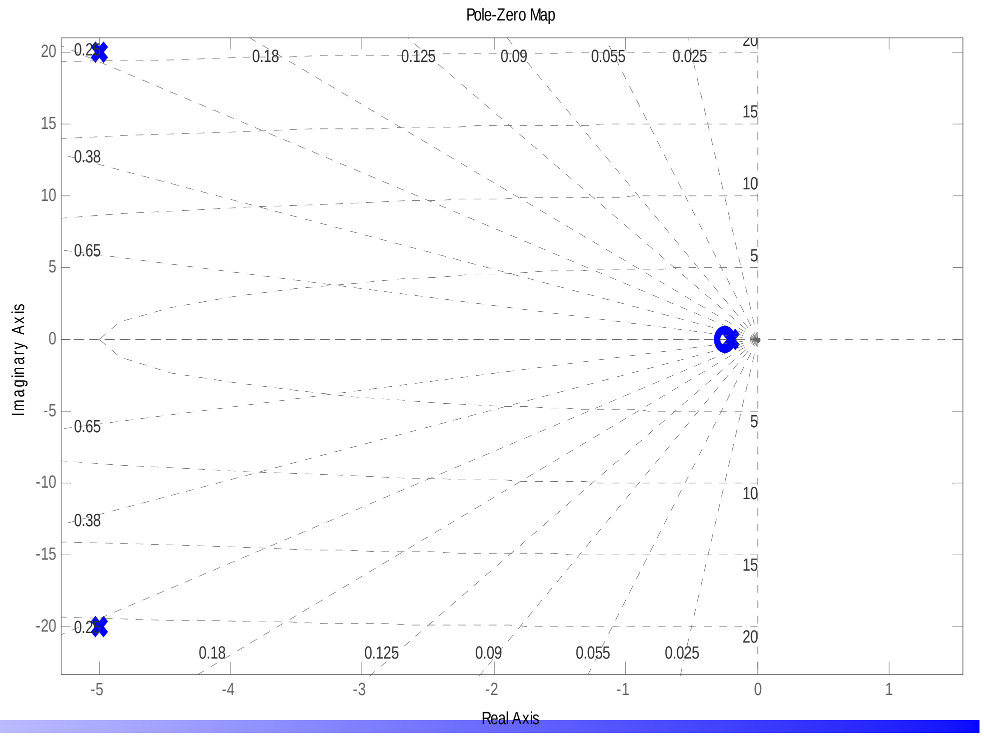
$$G(0) = \frac{2000 \cdot 0.25}{0.2 \cdot 425} = 5.8824$$

$$z_1 = -0.25$$

$$p_1 = -0.2$$

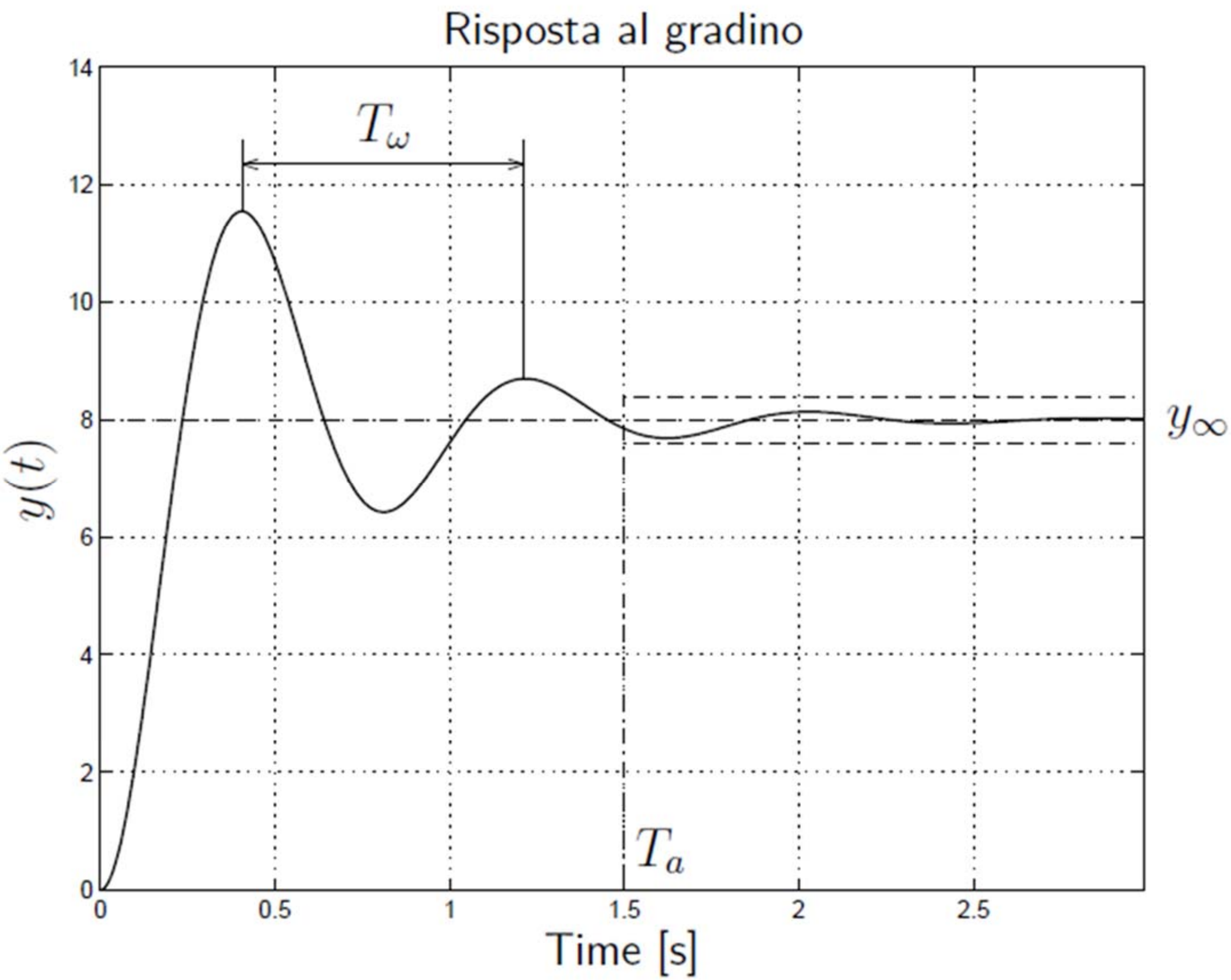
$$p_{4,5} = -5 \pm j20$$



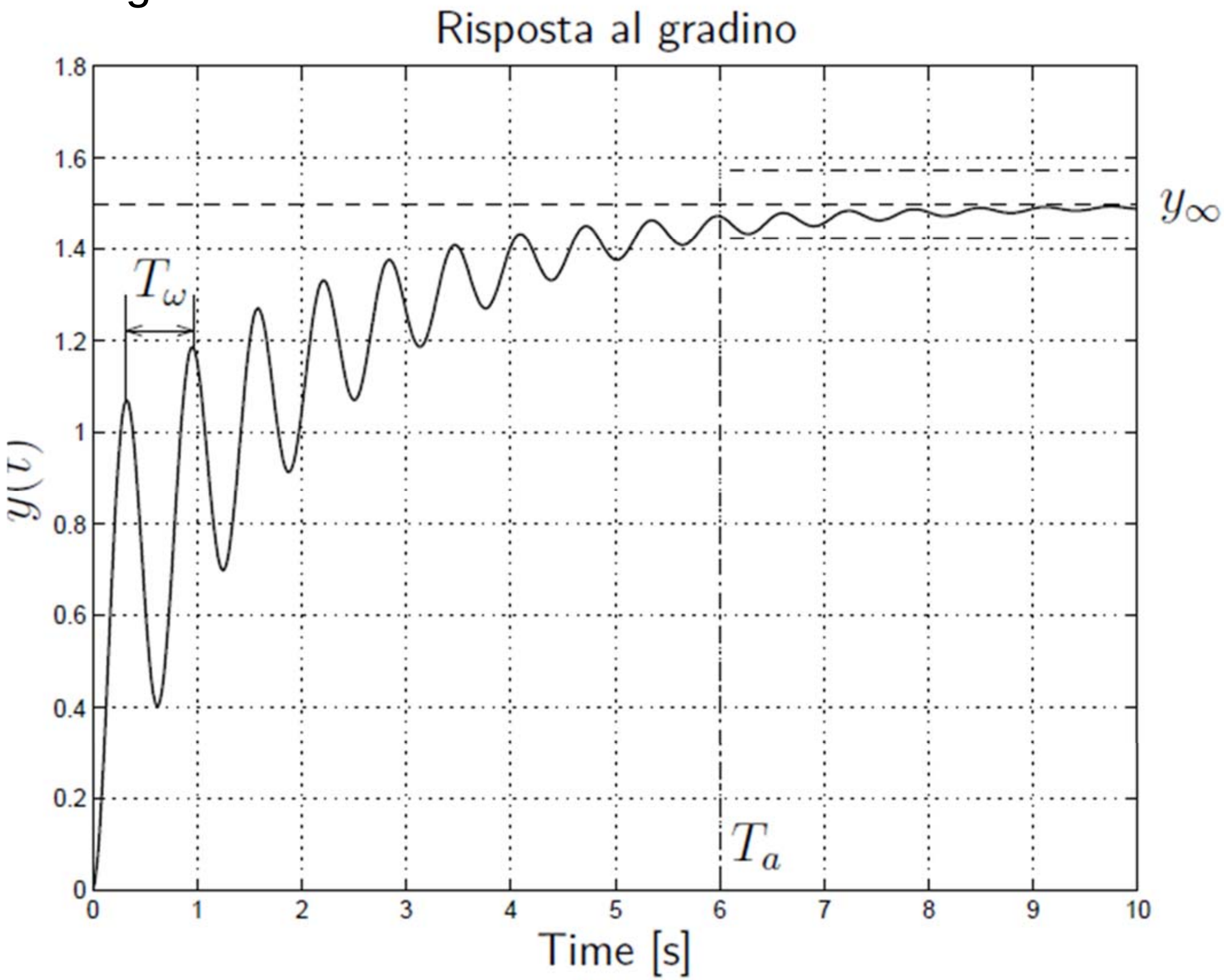
# Sistemi di ordine superiore al secondo

- **Esercizio:** determinare i poli dominanti e il guadagno statico del sistema la cui risposta al gradino unitario è riportata in figura



# Sistemi di ordine superiore al secondo

- **Esercizio:** determinare i poli dominanti (sapendo che sono 3 con la stessa parte reale) e il guadagno statico del sistema la cui risposta al gradino unitario è riportata in figura



**CONTROLLI AUTOMATICI**
**Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo**

http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti/ControlliAutomatici.html

# Sistemi elementari del 1º e 2º ordine
# FINE


Ing. Luigi Biagiotti

e-mail: luigi.biagiotti@unimore.it

http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti